

**AUTOMORFISMA PARSIAL GRAF WARNA CAYLEY
YANG DIBANGUN OLEH SUATU GRUPOID**



SKRIPSI

Oleh :

Bety Dian Kristina Ningrum

J2A 005 010

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2010

**AUTOMORFISMA PARSIAL GRAF WARNA CAYLEY
YANG DIBANGUN OLEH SUATU GRUPOID**

Bety Dian Kristina Ningrum

J2A 005 010

skripsi

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

pada

Program Studi. Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS DIPONEGORO**

SEMARANG

2010

HALAMAN PENGESAHAN

Lembar 1

Judul : Automorfisma Parsial Graf warna Cayley yang Dibangun oleh
Suatu Grupoid

Nama : Bety Dian Kristina Ningrum

NIM : J2A 005 010

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 17 Mei 2010 dan dinyatakan
lulus pada tanggal 31 Mei 2010.

Semarang, 1 Juni 2010
Panitia Penguji Tugas Akhir
Ketua,

Drs. Bayu Surarso, M.Sc, Ph.D

NIP. 19631105 198803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA UNDIP

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Dr. Widowati, S.Si, M.Si
NIP. 19690214 199403 2 002

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si
NIP. 19670729 199403 1 001

HALAMAN PENGESAHAN

Lembar 2

Judul : Automorfisma Parsial Graf warna Cayley yang Dibangun oleh
Suatu Grupoid

Nama : Bety Dian Kristina Ningrum

NIM : J2A 005 010

Jurusan : Matematika

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 17 Mei 2010

Pembimbing Utama

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si
NIP. 19670729 199403 1 001

Semarang, 31 Mei 2010

Pembimbing Anggota

Lucia Ratnasari, S.Si, M.Si
NIP. 19710627 199802 2 001

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia Nya, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

Tugas Akhir yang berjudul **“AUTOMORFISMA PARSIAL GRAF WARNA CAYLEY YANG DIBANGUN OLEH SUATU GRUPOID ”** ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro.

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terimakasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. Dra. Rum Hastuti, M.Si selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang.
2. Ibu Dr. Widowati, S.Si, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNDIP.
3. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika FMIPA UNDIP dan sebagai pembimbing I yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingannya hingga selesainya Tugas Akhir ini.
4. Ibu Lucia Ratnasari, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing 2 yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingannya hingga selesainya Tugas Akhir ini.
5. Ibu Dra. Titi Udjiani SRRM, M.Si selaku dosen wali.
6. Semua pihak yang tidak dapat kami sebutkan satu per satu

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua.

Semarang, 1 Juni 2010

Penulis

ABSTRAK

Grupoid adalah suatu himpunan tak kosong yang tertutup terhadap operasi biner, himpunan generator Δ grupoid merupakan subset dari grupoid dimana setiap elemen grupoid dapat ditulis sebagai hasil berhingga pada elemen generator. Graf warna Cayley ($\Delta(G)$) adalah suatu digraf yang dengan himpunan titiknya adalah G dan himpunan busurnya $(\Delta(G)) = \{ (g, h) \mid g, h \in G, (h, g) \in \Delta \}$. Generator grupoid berfungsi sebagai warna dan arah busur digraf. Pemetaan adalah suatu pemetaan bijektif antara graf $\Delta(G)$ dengan dirinya sendiri. Automorfisma parsial pada graf warna cayley ($\Delta(G)$) adalah pemetaan bijektif antara dua tail graf warna cayley ($\Delta(G)$). Himpunan automorfisma parsial graf warna Cayley ($\Delta(G)$) adalah $\text{Aut}(\Delta(G))$.

Kata kunci : graf warna Cayley, grupoid, automorfisma parsial

ABSTRACT

Groupoid is non empty set which closed by biner operation, generating set of groupoid Δ is subset of the grupoid which every elements of groupois can written as a finite product of elements of generator. Cayley color graph $(\Delta(\))$ is a digraph with vertices and edges $(\Delta(\)) = \{ (,) \mid \in , \in \Delta, (,) \in (\) \}$. The function of generating set is color and arrow of edge of digraph. A mapping is bijection mapping from Graph $\Delta(\)$ to Graph $\Delta(\)$ itself. A partial automorphism of a Cayley color graph $(\Delta(\))$ is bijection mapping two tails Cayley color graph $(\Delta(\))$ The set of partial automorphisms of a Cayley color graph $(\Delta(\))$ is $\Delta(\)$.

Key words : Cayley color graph, Grupoid, partial automorphism.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
KATA PENGANTAR	iv
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR SIMBOL	ix
DAFTAR GAMBAR.....	x
DAFTAR TABEL.....	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan.....	2
1.3 Pembatasan Masalah.....	2
1.4 Metode Pembahasan.....	2
1.5 Tujuan Pembahasan.....	3
1.6 Sistematika Penulisan	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Teori Himpunan	4
2.2 Fungsi(pemetaan)	6
2.3 Grupoid	9
2.4 Graf dan Digraf.....	11
BAB III AUTOMORFISMA PARSIAL GRAF WARNA CAYLEY YANG	
DIBANGUN OLEH SUATU GRUPOID	19
3.1 Grupoid Transitif.....	19
3.2 Graf warna cayley	22
3.3 Automorfisma parsial graf warna Cayley	36

BAB IV	PENUTUP	50
4.1	Kesimpulan	50
4.2	Saran.....	50
DAFTAR PUSTAKA.....		51

DAFTAR SIMBOL

		: grupoid
Δ		: generator
\rightarrow		: memetakan himpunan ke himpunan
		: invers dari
$(\)$: himpunan titik graf G
$(\)$: himpunan daftar sisi graf G
$\Delta(\)$: graf warna Cayley
$(\Delta(\))$: himpunan titik graf graf warna Cayley
$(\Delta(\))$: himpunan busur graf graf warna Cayley
$\text{PAut } X$: himpunan semua automorfisma parsial graf X
■		: telah terbukti

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Contoh fungsi dan bukan fungsi	6
Gambar 2.2	Fungsi surjektif	7
Gambar 2.3	Fungsi injektif	8
Gambar 2.4	Fungsi bijektif	8
Gambar 2.5	Graf terhubung dan graf tidak terhubung	11
Gambar 2.6	Graf	12
Gambar 2.7	Digraf	13
Gambar 2.8	Digraf	14
Gambar 2.9	Digraf yang merupakan subdigraf dari digraf	15
Gambar 2.10	Homomorfisma graf	16
Gambar 2.11	Pemetaan $\phi : (G, \rightarrow) \rightarrow (H, \rightarrow)$	16
Gambar 2.12	Isomorfisma Graf	17
Gambar 3.1	<i>Grup Graf</i> (G, \rightarrow)	23
Gambar 3.2	Graf warna Cayley $\Delta(G)$ dengan grupoid transitif	31
Gambar 3.3	Digraf	32
Gambar 3.4	Tail (a)	32
Gambar 3.5	Tail (a, b)	34
Gambar 3.6	Tail (a, b, c)	34
Gambar 3.7	Digraf X dan digraf Y	37
Gambar 3.8	Homomorfisma parsial graf X ke graf Y	37
Gambar 3.9	Graf warna Cayley $\mathbb{Q}(G)$	38
Gambar 3.10	Pemetaan antara dua tail	39

Gambar 3.11	Automorfisma parsial graf $C_\Delta()$	39
Gambar 3.12	Invers Automorfisma parsial : $() \rightarrow \dots\dots(\dots)$	47
Gambar 3.13	Invers Automorfisma parsial : $0 \rightarrow (\dots)$	48

DAFTAR TABEL

TABEL 2.1	Grup M	10
TABEL 3.1	Grup G	19
TABEL 3.2	Grupoid	20
TABEL 3.3	Grup Transitif	21
TABEL 3.4	Grup	23

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bidang bahasan Matematika yang mempelajari himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan garis. Aplikasi teori graf dalam kehidupan sehari-hari diantaranya penggunaan algoritma-algoritma pengoptimalan suatu jalur atau lintasan yang menggunakan prinsip dasar graf. Dalam perkembangan teori graf tidak lepas dari perkembangan bidang bahasan matematika yang lain, salah satunya adalah aljabar khususnya teori grupoid.

Pada tahun 1877-1879 seorang ahli matematikawan yaitu Arthur Cayley mengkontruksikan suatu teori pewarnaan yang diperkenalkan pada graf yang dibentuk dari suatu grup yang dikenal sebagai grup warna (*Gruppenbild* atau lebih dikenal dengan graf warna Cayley). Teori grupoid digunakan untuk mendefinisikan graf warna Cayley.

Pada tahun 1926 H. Brandt memperkenalkan suatu himpunan yang dinamakan grupoid pada paper “ *On Composition of quadratic forms in four variables* ” seorang ahli matematikawan A.T White pada tahun 1984 membuktikan bahwa automorfisma suatu graf warna Cayley yang dibentuk dari suatu grup merupakan suatu bentuk grup permutasi. Berdasarkan hasil dari A.T white disini akan ditunjukkan automorfisma parsial graf warna cayley yang dibangun dari grupoid. Himpunan busur dan himpunan titik pada graf warna Cayley merupakan elemen dari grupoid. Dengan adanya generator sebagai

pembangkit pada grupoid, himpunan busur pada graf warna Cayley dapat dibentuk dengan warna sesuai generator.

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah :

1. Bagaimana membuat suatu graf warna Cayley dari grupoid.
2. Bagaimana bentuk pemetaan antara graf warna Cayley yang dibentuk dari grupoid dengan dirinya sendiri.

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan dalam pembahasan isomorfisma graf warna Cayley pada grupoid adalah grupoid yang digunakan untuk membentuk graf warna Cayley merupakan grupoid berhingga.

1.4 Metode Pembahasan

Metode yang digunakan dalam pembahasan isomorfisma graf warna Cayley pada grupoid adalah studi literatur. Pembahasan dimulai dengan mengulas kembali mengenai konsep dasar himpunan, fungsi, grupoid, graf dan digraf. Pembahasan himpunan automorfisma graf dan isomorfisma grupoid juga akan dibahas untuk menjelaskan isomorfisma graf warna Cayley pada grupoid. Pada akhir pembahasan akan diperoleh isomorfisma antara graf warna Cayley dan grupoid.

1.5 Tujuan Pembahasan

Adapun tujuan dari pembahasan tugas akhir ini adalah :

1. Membuat graf warna Cayley dari grupoid berhingga
2. Menunjukkan automorfisma graf warna Cayley .

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan sebagai dasar penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Bab I adalah pendahuluan, yang berisi tentang Latar Belakang, Permasalahan, Pembatasan Masalah, Metode Pembahasan, Tujuan Pembahasan, dan Sistematika Penulisan.
2. Bab II adalah Dasar Teori. Pada bab ini secara garis besar berisi ulasan mengenai teori-teori yang mendukung pembahasan pada bab III, diantaranya : Teori Himpunan, Fungsi, Grupoid, Graf dan Digraf.
3. Bab III adalah pembahasan Isomorfisma Graf warna Cayley pada grupoid. Dalam bab ini yang dibahas antara lain Grupoid transitif, Graf warna Cayley, dan automorfisma Graf warna Cayley.
4. Bab IV adalah Penutup yang berisi Kesimpulan dan saran.