

**GRAF DIAMETER DUA DENGAN KOMPLEMENTENYA
DAN GRAF *MOORE* DIAMETER DUA**



SKRIPSI

Oleh :

ASTRIA

J2A 006 006

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG**

2010

**GRAF DIAMETER DUA DENGAN KOMPLEMENTENYA
DAN GRAF *MOORE* DIAMETER DUA**

ASTRIA

J2A 006 006

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains/ Sarjana Komputer

pada

Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS DIPONEGORO**

SEMARANG

2010

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Graf Diameter Dua dengan Komplementnya dan Graf *Moore*
Diameter Dua

Nama : Astria

NIM : J2A 006 006

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 21 Mei 2010 dan dinyatakan **lulus** pada tanggal 25 Mei 2010.

Semarang, 25 Mei 2010
Panitia Penguji Tugas Akhir
Ketua,

Suryoto, S.Si, M.Si
NIP. 19680714 199403 1 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA UNDIP

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Dr. Widowati, M.Si
NIP. 19690214 199403 2 002

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si
NIP. 19670729 199403 1 001

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Graf Diameter Dua dengan Komplementnya dan Graf *Moore*
Diameter Dua

Nama : Astria

NIM : J2A 006 006

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 21 Mei 2010

Pembimbing Utama

Semarang, 25 Mei 2010
Pembimbing Anggota

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si
NIP. 19670729 199403 1 001

Drs. YD. Sumanto, M. Si
NIP. 19640918 199301 1 002

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Sholawat dan salam penulis sampaikan kepada Rasulullah SAW beserta keluarganya, sahabatnya, dan orang-orang yang tetap setia mengikuti sunnahnya.

Tugas akhir yang berjudul **“GRAF DIAMETER DUA DENGAN KOMPLEMENNYA DAN GRAF MOORE DIAMETER DUA”** ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Diponegoro Semarang.

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terimakasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. Ibu Dra. Rum Hastuti, M.Si selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang.
2. Ibu Dr. Widowati, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Diponegoro Semarang.
3. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing I yang dengan penuh kesabaran membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.
4. Bapak Drs. YD. Sumanto, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.

5. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang, yang telah memberikan ilmunya kepada penulis.
6. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan kepada penulis, Amin.

Penulis menyadari bahwa dalam pembuatan Tugas Akhir ini masih banyak kekurangannya. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini bisa membawa manfaat bagi penulis sendiri khususnya dan bagi para pembaca pada umumnya.

Semarang, Mei 2010

Penulis

ABSTRAK

Suatu graf G disebut graf berdiameter dua jika jarak terbesar antar dua titik dalam graf tersebut adalah dua. Jika G adalah graf sederhana, komplemen \bar{G} dari suatu graf G adalah graf dengan himpunan titik pada \bar{G} sama dengan himpunan titik pada graf G , dan suatu sisi merupakan sisi dari \bar{G} jika dan hanya jika sisi tersebut bukan sisi dari G . Menentukan suatu graf G berdiameter dua atau tidak dapat ditinjau dari sifat sifat graf komplemennya. Graf *Moore* diameter dua adalah graf reguler (*r-regular*) dengan diameter dua, derajat r dan banyak titiknya adalah $n_{r,2} = r^2 + 1$. Graf *r-regular* berdiameter dua yang merupakan graf *Moore* hanyalah graf dengan derajat $r = 2, 3, 7$ (dan mungkin) 57.

Kata kunci : graf, diameter dua, komplemen, graf *Moore*, *r-regular*

ABSTRACT

A graph G is called graph of diameter two if the maximum distance between two vertices in G is two. If G is a simple graph, complement \bar{G} of a graphs G is graph with vertex set at \bar{G} equal to the vertex set on the graph G , and an edge is the edge of \bar{G} if and only if that edge is not the edge of G . Define a graph G with diameter two or not, can be evaluated from the properties of complement graph. A Moore graphs of diameter two is a r -regular graph with diameter two, degree r and the number of vertices is $n_{r,2} = r^2 + 1$. A r -regular graph with diameter two which is a Moore graph is only a graph with degree $r = 2, 3, 7$ (and possibly 57).

Key words : graph, diameter two, complement, Moore graphs, r -regular

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
KATA PENGANTAR	iv
ABSTRAK	vi
ABSTRACT.....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR SIMBOL	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
BAB I. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penulisan	3
1.5 Sistematika Penulisan	3
BAB II. TEORI PENUNJANG	5
2.1 Terminologi Graf	5
2.2 Jenis-jenis Graf	12
2.3 Matriks <i>Adjacency</i> dan Nilai Eigen	14
BAB III. PEMBAHASAN.....	21
3.1 Graf Diameter Dua	21
3.2 Sifat-sifat Graf Diameter Dua pada Komplementnya	22
3.3 Banyak Titik Maksimal Graf <i>Moore</i> Diameter Dua	40

BAB IV. PENUTUP	56
2.1 Kesimpulan	56
2.2 Saran	56
DAFTAR PUSTAKA	58
LAMPIRAN	60

DAFTAR SIMBOL

a_{ij}	: Entri matriks baris ke- i dan kolom ke- j
C_n	: Graf sikel dengan n titik
$d(u, v)$: Jarak antara titik u dan titik v
$der(v)$: Derajat titik v
$diam(G)$: Diameter graf G
$E(G)$: Himpunan sisi pada graf G
e_i	: Sisi (<i>edge</i>) ke i
G	: Graf
\bar{G}	: Graf komplemen dari graf G
K_n	: Graf Komplit
N_n	: Graf Nol
n	: Banyak titik pada graf G
$n_{r,D}$: Banyak titik yang menyusun graf r -regular diameter D
r	: Derajat titik graf <i>regular</i>
$V(G)$: Himpunan titik pada graf G
v_i	: Titik (<i>vertex</i>) ke i
θ	: Nilai eigen (<i>eigenvalue</i>)
λ	: banyaknya titik <i>adjacent</i> antara dua titik yang <i>adjacent</i>
μ	: banyaknya titik <i>adjacent</i> antara dua titik yang tidak <i>adjacent</i>

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Contoh Graf.....	5
Gambar 2.2 Graf tidak sederhana (a) dan graf sederhana (b)	6
Gambar 2.3 Graf berbobot (a) dan graf tidak berbobot (b).....	7
Gambar 2.4 Graf komplemen.....	9
Gambar 2.5 Subgraf	10
Gambar 2.6 <i>Star</i> dan <i>Double-star</i>	12
Gambar 2.7 Contoh Graf Nol.....	12
Gambar 2.8 K_4 (a) dan bukan graf komplit (b)	13
Gambar 2.9 Contoh Graf Sikel.....	14
Gambar 2.10 Graf tidak terhubung (a) dan graf terhubung (b).....	14
Gambar 3.1 Graf berdiameter dua	21
Gambar 3.2 Graf tidak terhubung (a) dengan komplemen berdiameter satu (b)...	24
Gambar 3.3 Graf tidak terhubung (a) dengan komplemen berdiameter dua (b)...	24
Gambar 3.4 Graf tidak terhubung (a) dan komplemennya (b).....	27
Gambar 3.5 Graf terhubung (a) dan komplemennya (b).....	27
Gambar 3.6 Graf dengan komplemen yang dibangun oleh <i>double-star</i>	29
Gambar 3.7 Graf dengan komplemen yang tidak dibangun oleh <i>double-star</i>	30
Gambar 3.8 Graf diameter dua dengan komplemen berdiameter empat	32
Gambar 3.9 Graf diameter dua dengan komplemen <i>2-regular</i> berdiameter tiga...	33

Gambar 3.10	Graf diameter dua dengan komplemen berdiameter empat	33
Gambar 3.11	Graf Petersen.....	34
Gambar 3.12	Komplemen Graf Petersen	35
Gambar 3.13	Graf <i>3-regular</i>	35
Gambar 3.14	Graf <i>6-regular</i>	36
Gambar 3.15	Graf tujuh titik.....	37
Gambar 3.16	<i>Double-star</i> pembangun graf	37
Gambar 3.17	Graf komplemen Gambar 3.15.....	38
Gambar 3.18	Graf enam titik	38
Gambar 3.19	<i>Double-star</i> pembangun graf	39
Gambar 3.20	Graf komplemen Gambar 3.18.....	40
Gambar 3.21	Graf diameter lima	41
Gambar 3.22	Graf <i>3-regular</i> diameter dua	42
Gambar 3.23	K_2	48
Gambar 3.24	C_5	48
Gambar 3.25	C_4	49
Gambar 3.26	Graf Petersen.....	50
Gambar 3.27	Contoh Graf dengan $D = 2$, $r = 3$ dan $n = 6$	50
Gambar 3.28	Contoh Graf dengan $D = 2$, $r = 3$ dan $n = 8$	51
Gambar 3.29	Graf Hoffman-Singleton	53
Gambar 3.30	Contoh Graf dengan $D = 2$, $r = 7$ dan $n = 10$	54
Gambar 3.31	Contoh Graf dengan $D = 2$, $r = 3$ dan $n = 8$	54

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Tabel graf <i>Moore</i> diameter dua.....	48

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Listing program Gambar 2.18	60

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf muncul pertama kali pada tahun 1736 ketika Euler menyelesaikan kasus Jembatan Königsberg. Meskipun pada awalnya graf diciptakan untuk diterapkan dalam penyelesaian masalah rute terpendek, namun graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas di dalam teori graf itu sendiri.

Banyak yang dapat dipelajari dari suatu graf, salah satu diantaranya adalah mengenai diameter graf. Diameter suatu graf adalah jarak terbesar antar dua titik dalam graf tersebut. Yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah graf yang memiliki diameter dua, sehingga jarak terbesar antar dua titik dalam graf tersebut adalah dua. Dari graf diameter dua dapat dipelajari sifat-sifat graf komplementnya serta banyak titik maksimal graf *Moore* diameter dua.

Dua graf yang saling berkomplemen memiliki beberapa hubungan yang istimewa, yang paling mendasar adalah keduanya memiliki himpunan titik yang sama dan himpunan sisi yang saling asing. Pada tahun 1985, Harary dan Robinson menemukan suatu hubungan antara graf dan komplementnya, dikaitkan dengan diameter masing-masing graf. Suatu graf berdiameter lebih besar atau sama dengan tiga memiliki komplemen yang berdiameter kurang atau sama

dengan tiga. Tahun 1986, Straffin menyatakan bahwa suatu graf yang memuat dua titik dengan jarak lebih besar atau sama dengan empat memiliki komplemen yang berdiameter dua. Jika suatu graf ditentukan diameternya maka komplemen dari graf itu memiliki ciri-ciri khusus sesuai dengan sifat yang dimilikinya.

Di sisi lain, sekitar tahun 1960 Edward F. Moore menemukan suatu graf yang disebut dengan graf *Moore*. Graf *Moore* adalah graf reguler (r -reguler) dengan derajat r , diameter D dan banyaknya titik yang menyusun merupakan banyak titik maksimal sesuai dengan derajat dan diameternya. Dengan demikian, suatu graf *Moore* diameter dua, dapat ditentukan banyak titik maksimal yang menyusun sesuai dengan derajatnya.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas sifat-sifat dari graf yang berdiameter dua dipandang dari komplemennya serta banyak titik maksimal yang membangun Graf *Moore* diameter dua.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, permasalahan yang diangkat dalam tugas akhir ini adalah :

- a. Bagaimana sifat-sifat dari graf yang berdiameter dua dipandang dari komplemennya.
- b. Menentukan banyak titik maksimal yang membangun graf *Moore* diameter dua.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam pembahasan tugas akhir ini hanya terbatas pada graf tak berarah, sederhana (*simple graf*) dan tidak berbobot. Graf sederhana yaitu graf yang tidak memiliki *loop* dan atau sisi ganda (*multiple edge*). Graf sederhana merupakan graf berhingga sehingga graf tak berhingga tidak masuk dalam pembahasan ini.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah :

- a. Mengetahui sifat-sifat dari graf yang berdiameter dua dipandang dari komplemennya.
- b. Mengetahui banyak titik maksimal yang membangun graf *Moore* diameter dua.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang permasalahan, perumusan masalah yang ada, pembatasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan.

BAB II TEORI PENUNJANG

Bab ini berisi dasar teori yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini yang meliputi terminologi graf, jenis-jenis graf serta matriks *adjacency* dan nilai *eigen*.

BAB III PEMBAHASAN

Berisi tentang graf diameter dua, sifat-sifat graf diameter dua pada komplementnya, dan banyak titik maksimal penyusun graf *Moore* diameter dua.

BAB IV PENUTUP

Berisi tentang kesimpulan dari pembahasan yang telah dilakukan, serta saran untuk pengembangan selanjutnya.