

Q-ALJABAR



SKRIPSI

Oleh :

Desrimarolisa Dwi Anggrainy

J2A 006 012

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2010

Q-ALJABAR

Desrimarolisa Dwi Angrainy

J2A 006 012

Skripsi

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains / Sarjana Komputer

pada

Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2010

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Q -aljabar

Nama : Desrimarolisa Dwi Angrainy

NIM : J2A 006 012

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 31 Mei 2010

dan dinyatakan **Lulus** pada tanggal 1 Juni 2010

Semarang, 1 Juni 2010

Panitia Penguji Tugas Akhir

Ketua,

Dra. Titi Udjiani SRRM, M.Si

NIP 196402231991022001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Fakultas MIPA UNDIP

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Fakultas MIPA UNDIP

Dr. Widowati, S.Si, M.Si

NIP 196902141994032002

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si

NIP 196707291994031001

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Q -aljabar

Nama : Desrimarolisa Dwi Angrainy

NIM : J2A 006 012

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 31 Mei 2010

Semarang, 1 Juni 2010

Pembimbing Utama

Pembimbing Anggota

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si

Drs. YD. Sumanto, M.Si

NIP 196707291994031001

NIP 196409181993011002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

Tugas Akhir yang berjudul ” **Q-ALJABAR** “ ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Jurusan Matematika, FMIPA, UNDIP Semarang.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, oleh karena itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dra. Rum Hastuti, M.Si selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Diponegoro Semarang.
2. Dr. Widowati, S.Si, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Diponegoro Semarang.
3. Bambang Irawanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Diponegoro Semarang.
4. Bambang Irawanto, S.Si, M.Si, dan Drs. YD. Sumanto, M.Si selaku Pembimbing I dan II yang telah memberikan bimbingan, pengarahan dan masukan sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.
5. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan dukungan sehingga penyusunan Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun senantiasa penulis harapkan. Semoga tulisan ini dapat bermanfaat bagi dunia pendidikan pada khususnya dan bagi semua pihak yang berkepentingan dengan ilmu matematika pada umumnya.

Semarang, Mei 2010

Penulis

ABSTRAK

Teori Q -aljabar merupakan perumuman dari teori BCH -aljabar, BCI -aljabar, dan BCK -aljabar, kemudian G -bagian dari Q -aljabar dan Q -aljabar p -semisederhana adalah suatu kelas pada Q -aljabar yang mempunyai kondisi khusus. Seperti halnya pada grup, Q -aljabar juga mempunyai konsep Q -subaljabar dan homomorfisma Q -aljabar.

Kata kunci : grup, BCH , BCI , BCK -aljabar dan Q -aljabar.

ABSTRACT

Theory of Q -algebra is a generalization of the theory of BCH -algebra, BCI -algebra, and BCK -algebras, then the G -part of Q -algebra and a p -semisimple Q -algebra are a class of Q -algebra who have special conditions. As well as in the group, Q -algebra also has the concept of Q -subalgebra and Q -algebra homomorphism.

Key words : group, BCH -algebra, BCI -algebra, BCK -algebra and Q -algebra.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
KATA PENGANTAR	iv
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR SIMBOL	x
DAFTAR TABEL	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penulisan	2
1.5 Sistematika Penulisan	2
BAB II TEORI PENUNJANG	4
2.1 Pemetaan	4
2.2 Teori Grup	6
2.3 <i>BCH</i> -aljabar	15
2.4 <i>BCI</i> -aljabar	20
2.5 <i>BCK</i> -aljabar	25
BAB III PEMBAHASAN	31

3.1	Q -aljabar.....	31
3.2	G -bagian dari Q -aljabar.....	57
3.3	Q -aljabar p -semisederhana.....	60
3.4	Q -subaljabar	63
3.5	Homomorfisma pada Q -aljabar	76
BAB IV	PENUTUP.....	86
4.1	Kesimpulan	86
4.2	Saran	87
	DAFTAR PUSTAKA	89

DAFTAR SIMBOL

f	: Pemetaan
G	: Grup
$=$: Sama dengan
\neq	: Tidak sama dengan
\emptyset	: Himpunan tak kosong
\subseteq	: Himpunan bagian
\in	: Elemen / Anggota
\notin	: Bukan elemen / Bukan anggota
\cap	: Irisan
$*$: Operasi biner “star”
\bullet	: Operasi biner “bullet”
$+$: Operasi biner “penjumlahan”
$-$: Operasi biner “pengurangan”
\forall	: Untuk setiap
\exists	: Untuk beberapa / terdapat

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1	Operasi $+$ pada Z_2 7
Tabel 2.2	Pembuktian operasi " $+$ " : $Z_2 \times Z_2 \rightarrow Z_2$ 7
Tabel 2.3	Pembuktian sifat asosiatif pada Z_4 dengan operasi " $+$ " 8
Tabel 2.4	Operasi $+$ pada Z_4 9
Tabel 2.5	Operasi $+$ pada H 14
Tabel 2.6	Pembuktian bahwa $f : Z_4 \rightarrow Z_2$ suatu homomorfisma grup ... 15
Tabel 2.7	Operasi $*$ pada X 16
Tabel 2.8	Pembuktian aksioma (BCH ₂) pada X dengan operasi $*$ 16
Tabel 2.9	Pembuktian aksioma (BCH ₃) pada X dengan operasi $*$ 17
Tabel 2.10	Operasi $*$ pada Z_4 21
Tabel 2.11	Pembuktian aksioma (BCI ₁) pada Z_4 dengan operasi $*$ 22
Tabel 2.12	Pembuktian aksioma (BCI ₂) pada Z_4 dengan operasi $*$ 23
Tabel 2.13	Pembuktian aksioma (BCI ₄) pada Z_4 dengan operasi $*$ 24
Tabel 2.14	Operasi $*$ pada Y 26
Tabel 2.15	Pembuktian aksioma (BCK ₁) pada Y dengan operasi $*$ 26
Tabel 2.16	Pembuktian aksioma (BCK ₂) pada Y dengan operasi $*$ 28
Tabel 2.17	Pembuktian aksioma (BCK ₄) pada Y dengan operasi $*$ 29
Tabel 3.1	Pembuktian aksioma (Q_3) pada Z_4 dengan operasi $*$ 32
Tabel 3.2	Pembuktian aksioma (Q_3) pada Y dengan operasi $*$ 36
Tabel 3.3	Operasi $*$ pada A 40
Tabel 3.4	Pembuktian aksioma (Q_3) pada A dengan operasi $*$ 41

Tabel 3.5	Operasi $*$ pada Z_2	46
Tabel 3.6	Pembuktian aksioma (Q_3) pada Z_2 dengan operasi $*$	47
Tabel 3.7	Pembuktian sifat assosiatif pada Z_2 dengan operasi $*$	54
Tabel 3.8	Operasi $*$ pada S_1	58
Tabel 3.9	Operasi $*$ pada S_2	58
Tabel 3.10	Pembuktian aksioma (Q_3) pada S_1 dengan operasi $*$	64
Tabel 3.11	Operasi $*$ pada I	66
Tabel 3.12	Pembuktian aksioma (Q_3) pada I dengan operasi $*$	66
Tabel 3.13	Pembuktian $f: G(Z_4) \rightarrow G(Z_4)$ adalah homomorfisma Q -aljabar	77
Tabel 3.14	Pembuktian $f: G(Z_4) \rightarrow Z_4$ adalah homomorfisma Q -aljabar	79
Tabel 3.15	Pembuktian $f: Z_4 \rightarrow G(Z_4)$ adalah homomorfisma Q -aljabar	80

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi, satu atau lebih operasi biner dan aksioma–aksioma yang berlaku.

Pada tahun 1966, Y. Imai dan K. Iseki memperkenalkan struktur aljabar abstrak yaitu *BCK*-aljabar. Pada tahun yang sama, K. Iseki memperkenalkan gagasan baru yaitu *BCI*-aljabar yang merupakan perumuman dari *BCK*-aljabar, sehingga *BCK*-aljabar termuat di dalam *BCI*-aljabar. Pada tahun 1983, Q. P. Hu dan X. Li memperkenalkan struktur aljabar abstrak yang lebih luas lagi, yaitu *BCH*-aljabar. Mereka menunjukkan bahwa *BCI*-aljabar merupakan *BCH*-aljabar. Kemudian pada tahun 2001, Joseph Neggers, Sun Shin Ahn, dan Hee Sik Kim memperkenalkan gagasan baru, yang disebut *Q*-aljabar, yang merupakan perumuman dari *BCH*-aljabar, *BCI*-aljabar dan *BCK*-aljabar.

Misalkan X himpunan tak kosong dengan operasi biner “ $*$ ” dan 0 sebagai elemen khusus, serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka akan membentuk struktur aljabar baru yang disebut *Q*-aljabar.

Fenomena yang menarik dari *Q*-aljabar adalah *Q*-aljabar mempunyai suatu kelas spesial yang disebut *G*-bagian dari *Q*-aljabar dan *Q*-aljabar *p*-semisederhana. Selain itu *Q*-aljabar juga mempunyai konsep *Q*-subaljabar dan homomorfisma *Q*-aljabar.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah apakah Q -aljabar itu, serta bagaimana sifat-sifat yang dimiliki Q -aljabar tersebut.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada tugas akhir ini, akan dibahas mengenai perumuman dari BCH -aljabar, BCI -aljabar, dan BCK -aljabar yang disebut Q -aljabar yang meliputi G -bagian dari Q -aljabar dan Q -aljabar p -semisederhana yang merupakan suatu kelas spesial dalam Q -aljabar, kemudian Q -subaljabar dan homomorfisma Q -aljabar. Dimana himpunan yang digunakan pada Q -aljabar, adalah himpunan bilangan yang berhingga.

1.4 Tujuan Penulisan

Berdasarkan uraian di atas, tujuan penulisan dari tugas akhir ini adalah memperkenalkan suatu struktur aljabar baru yaitu Q -aljabar, yang merupakan perumuman dari BCH -aljabar, BCI -aljabar dan BCK -aljabar termasuk G -bagian dari Q -aljabar, Q -aljabar p -semisederhana, Q -subaljabar dan homomorfisma pada Q -aljabar.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini terdiri dari 4 bab dan beberapa sub-bab. Bab I Pendahuluan yang berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan. Bab II Teori Penunjang yang memuat materi penunjang untuk pembahasan selanjutnya. Bab tersebut

berisi materi tentang pemetaan, teori grup, BCH -aljabar, BCI -aljabar, dan BCK -aljabar. Bab III merupakan Pembahasan dalam memperkenalkan struktur Q -aljabar yang meliputi Q -aljabar, G -bagian dari Q -aljabar, Q -aljabar p -semisederhana, Q -subaljabar dan homomorfisma Q -aljabar. Bab IV Penutup yang berisi tentang hasil yang diperoleh dari pembahasan, serta saran untuk melakukan studi lebih lanjut mengenai Q -aljabar.