Prosiding SPMIPA; pp: 43-49; 2006 ISBN: 979.704.427.0

MODEL PEMANENAN LOGISTIK DENGAN DAYA DUKUNG BERGANTUNG WAKTU PADA BUDIDAYA RUMPUT LAUT

Fitria Rakhmawati, Sutimin
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Diponegoro

Abstrak: Pada paper ini akan dikembangkan suatu model persamaan logistik sederhana. Model logistik ini dikembangkan dengan memperhatikan parameter daya dukung (carrying capacity) yang begantung pada waktu. Dari model yang telah dianalisis ini selanjutnya akan dikaji model pemanenan dengan menentukan fungsi panen yang proposional. Persamaan model ini dianalisis untuk mengetahui kestabilan system. Sebagai contoh dari model pertumbuhan dan pemanenan ini diterapkan pada pertumbuhan dan hasil panen rumput laut *Gracilaria gigas Harv.*

Kata Kunci: Persamaan logistik, carrying capacity(daya dukung), pemanenan

PENDAHULUAN

Rumput laut merupakan sebagai salah satu hasil perikanan dapat memberikan banyak manfaat dan dipergunakan dalam berbagai segi ekonomi. Permintaan akan rumput laut dari dalam negeri maupun internasional cenderung meningkat. Sebagai salah satu pengekspor rumput laut dipasaran internasional, hingga kini Indonesia untuk hamper seluruh produksinya masih bertumpu pada pada hasil pemunguan dari sumber alami.Sistem produksi yang semata-mat tergantung sumber alami mempunyai banyak kelemahan, antara lain kestabilan dan kesinambungan produksi yang tidak menentu, mutu yang kurang dapat dikendalikan karena percampuran dengan jenis lain dan benda-benda lain. Hal ini menyebabkan harga jual yang rendah, dan akibatnya daya saing dipasaran menjadi lemah.

Bertolak dari pemikiran tersebut,maka akan dikembangkan budidaya rumput laut dengan menggunakan model pertumbuhan logistik yang telah dikembangkan sesuai dengan daya dukung yang yang tersedia. Dengan pemodelan ini diharapkan dapat kita peroleh tentang analisa kestabilan dan kesinambungan budidaya rumut laut.

MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK

Model pertumbuhan logistik dibanganun dengan menggunakan kaidah logistik *(logistic low)* bahwa persediaan logistik ada batasnya, model ini mengasumsikan pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium)* [2]. Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama, sehingga grafiknya akan mendekati konstan (*zero growth*) [2]. Model logistik sederhana mengasumsikan bahwa laju pertumbuhan menurun secara linier dan bernilai nol saat $N = K$.

$\dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$ dengan $N = f(t)$ dan $N(t) = \dfrac{K}{1 + \left(\dfrac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}$ dimana K, r adalah konstan.

Model logistik sederhana memiliki dua titik kesetimbangan, kesetimbangan pertama pada $N_1 = 0$ dan kesetimbangan kedua yang merupakan titik kestabilan populasi yaitu $N_2 = K$. Laju pertumbuhan tertinggi terjadi pad saat $t = -\dfrac{\ln\left(\dfrac{\mathrm{N_0}}{\mathrm{K - N_0}}\right)}{\mathrm{r}}$ yaitu sebesar $\dfrac{1}{4}rK$ dan besranya populasi pada saat laju pertumbuhan maksimum adalah $\dfrac{K}{2}$

Model pertumbuhan logistik secara umum memang lebih baik karena telah memberikan pengertian jumlah populasi maksimum atau minimum sebagai titik jenuh pertumbuhannya [2]. Walaupun demikian, model pertumbuhan logistik dengan carrying capacity konstan seolah-olah menggambarkan bahwa daya dukung lingkungan akan selalu sama setiap saat. Pada kenyataannya perubahan teknologi mempengaruhi system dari daya dukung lingkungan (carrying capacity) [4].

Daya dukung (carrying capacity) dimodelkan sebagai model logistik dan merupakan fungsi ari waktu [4]. Besarnya daya dukung lingkungan pada suatu waktu diasumsikan lebih dari nol (k_1) dan pertumbuhan daya dukung lingkungan akan berhenti pada saat telah mencapai maksimum (k_2) [4]. Dengan asumsi tersebut diperoleh persamaan pertumbuhan daya dukung lingkungan sebagai berikut.

$$\frac{dK(t)}{dt} = r_1\left(K(t)-k_1\right)\left(1-\frac{\left(K(t)-k_1\right)}{k_2}\right). \tag{1}$$

Dengan menyelesaikan persamaan differensial tersebut diperoleh besarnya daya dukung lingkungan pada saat (t) adalah

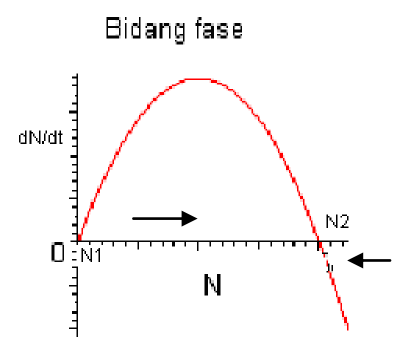
$$K(t) = \frac{k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2}{1+e^{-r_1 t}} . \tag{2}$$

Laju pertumbuhan populasi dengan daya dukung lingkungan merupakan fungsi dari waktu adalah

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N\left(1+e^{-r_1 t}\right)}{k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2}\right) , \tag{3}$$

dengan $N = f(t)$, dan besarnya populasi pada saat (t) adalah

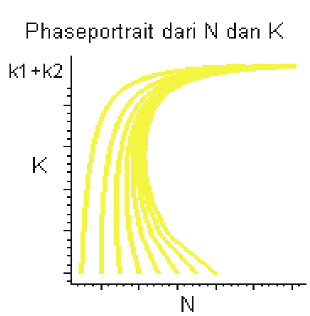
$$N(t) = \frac{k_1\left(k_1 + k_2 + k_1 e^{-r_1 t}\right)}{\left(k_1 + k_1 e^{-r_1 t}\right) + \dfrac{\left(2k_1 + k_2\right) - 2N_0}{N_0\left(k_1 + k_2 + k_1\right)} k_1\left(k_1 + k_2 + k_1 e^{-r_1 t}\right) e^{-rt}} . \tag{4}$$

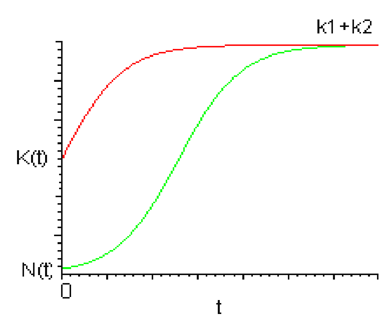


Gambar 1. Grafik bidang fase laju pertumbuhan $\left(\dfrac{dN}{dt}\right)$ terhadap jumlah populasi N

Laju pertumbuhan memiliki kesetimbangan pertama pada $N_1 = 0$ dan kesetimbangan kedua pada $N_2 = \dfrac{k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2}{1+e^{-r_1 t}}$ dan untuk $t \to \infty$ kesetimbangan kedua stabil pada $N_2 = k_1 + k_2$.

Laju pertumbuhan populasi akan mencapai nilai maksimum yang berbeda-beda sesuai dengan besarnya daya dukung pada saat itu dan akan stabil pada saat daya dukung telah mencapai maksimum.





(a) (b)

Gambar 2 (a). Grafik phaseportrait daya dukung (carrying capacity) dengan populasi (N)
(b). Grafik pertumbuhan daya dukung (carrying capacity) dan pertumbuhan populasi terhadap waktu

Untuk $t \to \infty$ maka besarnya populasi dan daya dukung lingkungan akan menuju titik jenuhnya yaitu $k_1 + k_2$.

MODEL PEMANENAN

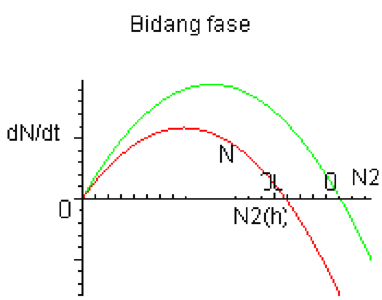
Jika $g(N)$ adalah laju pertumbuhan dan $h(N)$ adalah laju pemanenan maka laju pertumbuhan dengan pemanenan adalah

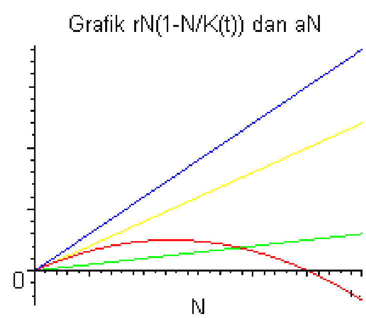
$$\frac{dN}{dt} = g(N) - h(N),$$

dengan $g(N) = rN\left(1 - \frac{N\left(1+e^{-r_1 t}\right)}{k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2}\right)$ dan $h(N) = \varepsilon N$ dengan $N = f(t)$ maka,

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N\left(1+e^{-r_1 t}\right)}{k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2}\right) - \varepsilon N, \tag{5}$$

dimana ε merupakan konstanta laju pemanenan.





(a) (b)

Gambar 3 (a). Grafik bidang fase laju pertumbuhan tanpa pemanenan dan laju pertumbuhan dengan pemanenan terhadap jumlah populasi(N)
(b). Grafik laju pertumbuhan $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ dan pemanenan εN terhadap jumlah populasi (N)

Kesetimbangan dari Laju pertumbuhan dengan pemanenan adalah $N_1(h) = 0$ atau $N_2(h) = \frac{(r-\varepsilon)}{r}\left(k_1 + \frac{k_2}{1+e^{-r_1 t}}\right)$. Menurut kriteria Routh-Hurwitz maka kesetimbangan kedua untuk $t \to \infty$ merupakan titik stabil dengan nilai $N_2(h) = \frac{(r-\varepsilon)}{r}(k_1 + k_2)$.

Dari persamaan (5) diketahui bahwa laju pertumbuhan memiliki dua titik kesetimbangan yang berarti bahwa diskriminan dari persamaan (5) adalah positif, sehingga berlaku:

$$(r-\varepsilon)^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon < r$$

Jika besarnya laju pemanenan kurang dari laju pertumbuhan intrinsik ($\varepsilon < r$) maka laju pertumbuhan populasi dengan pemanenan memiliki kestabilan pada $N_2(h) = \frac{k_1 + k_2}{r}\left(r - \varepsilon\right)$. Untuk pemanenan yang berkesinambungan yang dilaksanakan pada saat populasi mencapai kestabilan setelah pemanenan sebelumnya yaitu pada $N = N_2(h) = \frac{k_1 + k_2}{r}\left(r - \varepsilon\right)$ maka diperoleh,

$$y = \varepsilon \frac{k_1 + k_2}{r}\left(r - \varepsilon\right). \tag{6}$$

Jika persamaan (6) diturunkan terhadap laju usaha pemanena $\left(\varepsilon\right)$ maka diperoleh laju usaha pemanenan maksimum sebesar $\frac{r}{2}$ $\left(\varepsilon_{\max} = \frac{r}{2}\right)$dan hasil panen maksimum sebesar $\frac{r}{4}(k_1 + k_2)$ $\left(y_{\max} = \frac{r}{4}(k_1 + k_2)\right)$.

Semakin besar nilai ε berarti jumlah yang dipanen juga akan semakin banyak sehingga waktu yang dibutuhkan bagi populasi untuk dapat kembali mencapai jumlah semula pada saat belum dilaksanakan pemanenan juga akan semakin lama, bahkan jika besarnya $\varepsilon = r$ maka populasi akan mengalami kepunahan

STUDI KASUS

Studi kasus berdasarkan penelitian pertumbuhan rumput laut *Gracilaria gigas* yang dilaksanakan oleh Yusuf Isma'il Mochtar yang dilakukan ditambak polikultur Balai Besar Pengembangan dan Budidaya Air Payau (BBPBAP) Jepara mulai bulan Oktober hingga November 2004. Dari hasil penelitian tersebut akan dibangun model pertumbuhan logistik dari rumput laut *Gracilaria gigas*.

Penanaman rumput laut dilakukan dengan menggunakan tali nilon sepanjang 6 meter dengan menggunakan metode apung tali tunggal dengan jarak tanam sebanyak 90 titik tanam dengan berat awal 10 gram. Faktor-faktor yang mempengaruhi pertumbuhan rumput laut yaitu temperatur (29° - 31°), pH (8.2 – 8.8) dan salinitas (38 - 41‰), dan tingkat kecerahan (48 – 84).

Dari penelitian hingga 45 hari setelah tanam diperoleh bahwa pada 10 hari setelah tanam berat basah rumput lau adalah 1494 gram basah, 20 hari setelah tanam 2160.99 gram basah, 30 hari setelah tanam sebesar 4377.96 gram basah dan berat 45 hari setelah tanam 6428.34 gram basah.

PEMODELAN

Model Logistik dengan K(t)

Berat awal rumput laut yang ditanam adalah 10 gam sehingga total berat awal yang ditanam adalah 900 gram $\left(N_0 = 900\right)$. Diasumsikan bahwa daya dukung minimal adalah 900 $\left(k_1 = 900\right)$. Dari hasil penelitian bahwa rata-rata laju pertumbuhan tertinggi pada 20-30 hari setelah tanam. Jika diasumsikan bahwa pada 30 hari setelah tanam pertumbuhan daya dukung telah mencapai maksimum sehingga diperoleh $e^{-30r1} = 0$. Bila diketahui $N(30) = 4377.96$ gram basah, $N(31) = 4514.6520$ gram basah dan $N(45) = 6428.34$ gram basah maka diperoleh $r_1 = 0.16$, $r = 0.07$, dan $k_2 = 7752$. Sehingga laju pertumbuhan berat rumput laut pada waktu t adalah:

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0.07N(t)\left(1 - \frac{N(t)\left(1 + e^{-0.16t}\right)}{k_1 + k_1 e^{-0.16t} + k_2}\right) \tag{7}$$

$$N(t)=\frac{900\left(8652+900e^{0.1635592074t}\right)}{\left(900+900e^{-0.1635592074t}\right)+\frac{7752}{(9552)}\left(8652+900e^{-0.1635592074t}\right)e^{-0.06927615692t}} \qquad (8)$$

Model Logistik Sederhana

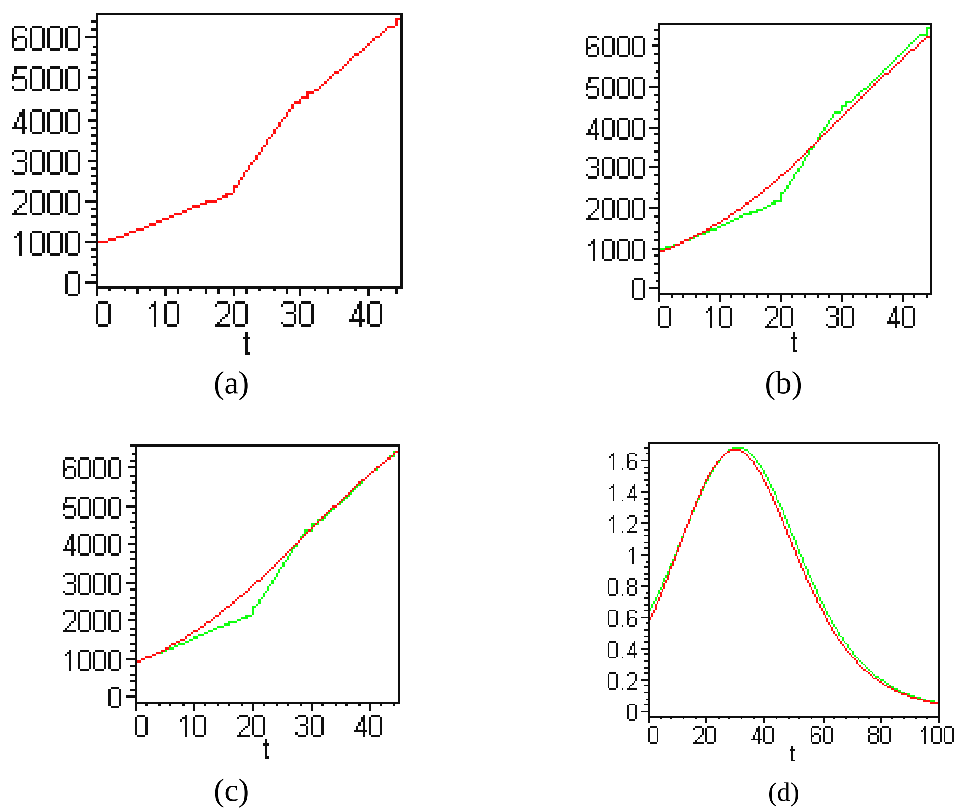
Dari model logistik dengan K(t) diperoleh bahwa laju pertumbuhan intrinsik rumput laut *Gacilaria gigas* adalah 0.07 sedangkan titik jenuh pertumbuhannya adalah sebesar 8652. Sehingga diperoleh persamaan laju pertumbuhan berat *Gracilaria gigas* pada waktu t adalah:

$$\frac{dN(t)}{dt}=0.07N(t)\left(1-\frac{N(t)}{8652}\right) \qquad (9)$$

dengan,

$$N(t)=\frac{8652}{1+\left(\frac{8652}{8652}-1\right)e^{-0.07t}} \qquad (10)$$

Dari hasil pemodelan logistik diperoleh plot sebagai berikut:



Gambar 4 (a). Grafik berat rumput laut dari penelitian

(b). Grafik berat rumput laut hasil penelitian dan model logistik dengan $\mathrm{r}=0.07$ dan $\mathrm{K}:=8652$ terhadap waktu

(c). Grafik berat rumput laut hasil penelitian dan model logistik dengan $\mathrm{r}=0.07, \mathrm{r}_1=0.16, \mathrm{k}_1=900$ dan $\mathrm{k}_2=7752$ terhadap waktu.

(d). Grafik laju pertumbuhan model logistik sederhana dan model logistik dengan K(t) terhadap waktu.

 ISBN: 979.704.427.0

Berdasarkan hasil plot terlihat bahwa pertumbuhan rumput laut *Gracilaria gigas* dapat dimodelkan secara logistik dengan menggunakan model pertumbuhan logistik sederhana maupun dengan model pertumbuhan logistik dengan daya dukung yang merupakan fungsi dari waktu. Oleh karena itu analisa pertumbuhan rumput laut *Gracilaria gigas* dapat dilakukan melalui analisa dari pertumbuhan logistik.

Model pertumbuhan berat rumput laut dengan menggunakan model logistik dengan daya dukung merupakan fungsi dari waktu lebih mendekati nilai yang sebenarnya dibandingkan dengan menggunakan model logistik sederhana.

Kecepatan laju pertumbuhan dengan model logistik dengan daya dukung fungsi dari waktu dan dengan model logistik pada awal pertumbuhan tidak begitu memperlihatkan adanya perbedaan. Tetapi pada saat kecepatan laju pertumbuhan menurun, kecepatan laju pertumbuhan dengan model logistik dengan daya dukung fungsi dari waktu kecepatannya lebih rendah dari pada kecepatan laju pertumbuhan pada model logistik sederhana. Perbedaan besarnya laju pertumbuhan juga akan menyebabkan besarnya berat basah pada saat yang sama.

Model logistik dengan daya dukung fungsi dari waktu dan model logistic sederhana memiliki kesatbilan populasi yang sama yaitu sebesar 8652 gram basah.

Pemanenan rumput laut yang paling tepat adalah pada saat 60 hari (2bulan) setelah tanam karena sebagai kurun waktu pertumbuhan terbaik [4]. Produksi dihitung menurrut berat seluruhnya yang dipanen per meter persegi selama masa pemeliharaan 60 hari, dengan rumus:

$$\varepsilon = \left| \left(\frac{N_{60}}{N_0} \right)^{\frac{1}{60}} - 1 \right| \times 100\% .$$

Berdasarkan model logistic dengan daya dukung konstan diketahui berat per meter persegi saat 60 hari setelah tanam adalah 425.68 gram basah dan berat awal per meter persegi adalah 50 gram basah maka diperoleh laju usaha pemanenan per meter persegi adalah sebesar 3.6% sehingga laju usaha pemanena total adalah sebesar 64.8% . Besarnya hasil produksi basah total adalah sebesar 4965.18 gram.

Sedangkan berdasarkan model logistik dengan daya dukung merupakan fungsi dari waktu diketahui berat basah total pada saat 60 hari setelah tanam adalah sebesar 7745.38 gram, sehinga besarnya laju usaha pemanenan adalah sebesar 3.65% per meter persegi dan laju total usaha pemanenan adalah sebesar 65.7%. Besarnya hasil total produksi basah adalah 5088.7 gram. Kestabilan berat basah *Gracilaria gigas* setelah dilakukannya pemanenan adalah sebesar 4140.59 gram basah.

PENUTUP

Model pertumbuhan logistik dengan daya dukung bergantung pada waktu memiliki tingkat kebenaran yang lebih tinggi dibandingkan dengan menggunakan model pertumbuhan logistik dengan daya dukung konstan. Hal ini terjadi karena pada model logistik dengan daya dukung merupakan fungsi dari waktu memperhatikan adanya aspek bahwa pada setiap waktu besarnya daya dukung lingkungan akan mengalami perubahan.

Pada saat yang sama laju pertumbuhan pada model logistik dengan daya dukung merupakan fungsi dari waktu memberikan hasil yang berbeda dengan laju pertumbuhan pada model logistik dengan daya dukung konstan. Perbedaan Laju pertumbuhan ini juga akan mempengaruhi perbedaan besarnya populasi pada saat yang sama sehingga akan mempengaruhi besarnya hasil panen.

Berdasarkan contoh kasus dapat disimpulkan bahwa pertumbuhan populasi rumput laut *Gracilaria gigas* dapat dimodelkan secara logistik dengan menggunakan model logistic dengan daya dukung bergantung pada waktu sehingga analisa pertumbuhan dan pemanenannya dapat dilakukan melalui analisa model pertumbuan logistik.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dirjen Dikti melalui program Hibah Kompetisi A2 dengan nomor kontrak penelitian nomor 15b/A2 – MAT/SPK/IV/2006.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Isma'il, Yusuf M, S.Si, *Laju Pertumbuhan dan Produksi Rumput Laut Gracilaria gigas Harv. dengan Metode dan Jarak Tanam Berbeda di Tambak Polikultur Jepara*, Purwokerto: Universitas Jendral Soedirman, 2001.

[2]. Kosala D. Purnomo, Model Pertumbuhan Populasi dengan Menggunakan Model Pertumbuhan Logistik, *Majalah Matematika dan Statistika*, Vol. 1, No. 1, pp. 21 – 29, 2000.

[3]. Ngurah Rai Sedanan, I.G., Jack S. Detaq,, Soehardi Pontjoprawiro, Nugroho Aji, *Uji Coba Budidaya Rumput Laut di Pilot Farm*, WBL/85/WP-37.

[4]. Perrin S. Meyer and Jesse H. Ausubel, Carrying Capacity: A Model with Logically Varrying Limits, *J. Technological Forecasting and Sosial Change*, Vol. 61, No. 3, pp. 209 – 214, 1999.

[5]. Rony. H, Kartiman, *Matematika Tingkat Tinggi*, Jakarta: PT. PRADNYA PARAMITA, 1985.

[6]. Soemarto, Noeniek, *Kalkulus Lanjutan*, Jakarta: Universitas Indonesia, 1987.