MODEL PEMANENAN LOGISTIK UNTUK PEMANENAN IKAN DENGAN LAJU PEMANENAN PROPOSIONAL

Sigit Nova Riyanto, Kartono
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Semarang
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang, 50275

Abstrak: Terdapat banyak model pemanenan, yang salah satunya model pemanenan logistik. Model pemanenan ini bergantung pada jenis laju pemanenannya. Pada makalah ini dikaji tentang model pemanenan logostik dengan laju pemanenan proposional. Dengan menggunakan analisis kestabilan diperoleh besarnya pemanenan yang diijinkan.

Kata Kunci: laju pemanenan proposional, analisa kestabilan

PENDAHULUAN

Indonesia sebagai salah satu Negara Kepulauan, banyak menyimpan sumber kekayaan hayati. Salah satu sumber kekayaan hayati di perairan Indonesia adalah ikan. Ekploitasi ikan dapat berperan dalam menambah pendapatan devisa negara. Namun demikian, ekploitasi yang tidak memperhatikan pemanfaatan yang berkelanjutan dapat menyebabkan hilangnya sumber kekayaan hayati tersebut.

Fokus utama dalam manajemen perikanan adalah " *Bagaimana menjaga kestabilan populasi ikan?*. Secara jelas obyek dari manajemen perikanan, yaitu membuat strategi pemanenan yang tidak akan membawa suatu spesies dalam kepunahan. Oleh karena itu, diperlukan tindakan pencegahan sedini mungkin melalui kebijakan strategi pemanenan yang baik.

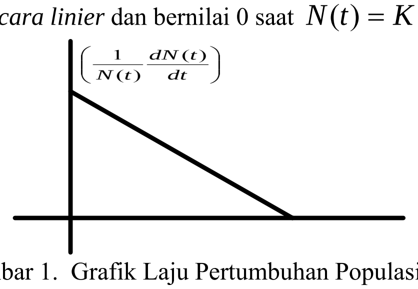
Sumber daya alam hayati khususnya ikan mengalami pertumbuhan. Pertumbuhan tersebut dipengaruhi oleh antara lain : persediaan makanan, faktor-faktor lingkungan (intensitas cahaya, suhu, habitat, musim), intensitas penangkapan. Pengaruh faktor lingkungan terutama musim dan intensitas penangkapan sangat signifikan terhadap jumlah populasi ikan.

Pertumbuhan jumlah populasi ikan pada masa tertentu akan mendekati titik kesetimbangan *(equilibrium)*, dalam kondisi ini jumlah kelahiran dan kematian populasi ikan dianggap sama, serta mengingat bahwa setiap populasi ikan memiliki potensi untuk berkembang biak. Populasi memiliki laju pertumbuhan yang berangsur-angsur menurun secara tetap. Sepanjang waktu pertumbuhan keadaan lingkungan atau daya dukung lingkungan tidak berubah. Dari asumsi tersebut dapat diturunkan suatu model pertumbuhan populasi yang disebut **model pertumbuhan logistik**

Model pertumbuhan logistik menurut Fulford [2] dapat diturunkan dengan menggunakan asumsi (Gambar. 1):

(a) laju pertumbuhan populasi $\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}$ pada saat $N(t)=0$ adalah *r*(dimana *r kon*stan);

(b) laju pertumbuhan ini *menurun secara linier* dan bernilai 0 saat $N(t)=K$



Gambar 1. Grafik Laju Pertumbuhan Populasi

Dimana *r* adalah **laju pertumbuhan intrinsik** (*intrinsic growth rate*), yaitu nilai yang menggambarkan daya-tumbuh suatu populasi. Dalam hal ini diasumsikan $r>0$, yaitu mengingat setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak. Dari asumsi di atas dapat diturunkan suatu model pertumbuhan populasi yang disebut sebagai model pertumbuhan logistik, yaitu:

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}=r-\frac{r}{K}N(t) \tag{1}$$

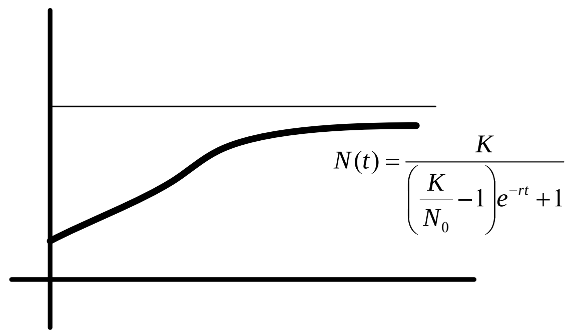
Atau

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \tag{2}$$

Jika ditambahkan syarat awal $N(0) = N_0$, maka diperoleh solusi khusus persamaan diferensial ini, yaitu:

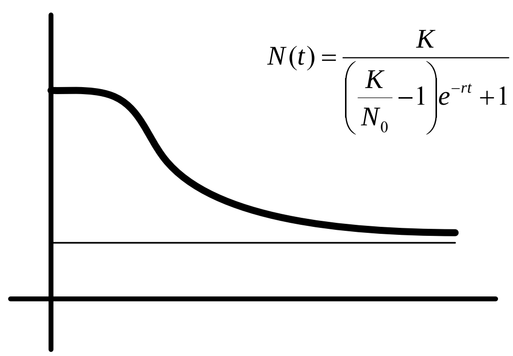
$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt} + 1} \tag{3}$$

Untuk $r > 0$ berlaku $\lim_{t \to \infty} N(t) = K$ sehingga disimpulkan bahwa grafik dari persamaan (3) mempunyai asimtot mendatar $N(t) = K$. Grafik solusi untuk kasus $K > N_0$ dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik Pertumbuhan Logistik yang Naik

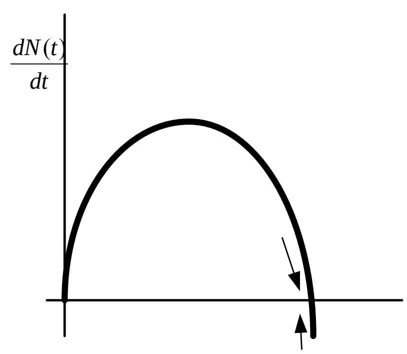
Sedangkan, untuk $K < N_0, r > 0$ grafik solusinya adalah:



N(t)

Gambar 3 Grafik Pertumbuhan Logistik yang menurun K

Grafik dari persamaan (2) secara geometris dapat ditafsirkan dari grafik yang menggambarkan hubungan $\frac{dN(t)}{dt}$ dan *N* pada bidang fasa berikut (Gambar 4):



No

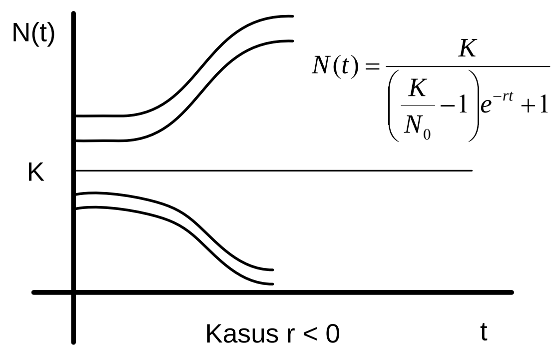
Kasus K

Gambar 4. Grafik $\frac{dN(t)}{dt}$ versus *N*

N(t)

Dari grafik ini terlihat bahwa pada $0 < N(t) < K$ berlaku $\dfrac{dN(t)}{dt} > 0$, yaitu berarti $N(t)$ adalah fungsi naik pada selang tersebut. Sedangkan, untuk N(t)>K berlaku $\dfrac{dN(t)}{dt} < 0$, yaitu berarti $N(t)$ merupakan fungsi turun. Hal lain adalah bahwa grafik $N(t)$ terbuka ke atas pada $0 < N(t) < \dfrac{K}{2}$ atau *N(t)<K* dan terbuka ke bawah pada selang $\dfrac{K}{2} < N(t) < K$. Kesimpulan ini mengarahkan pada dua grafik $N(t)$ terdahulu.

Boyce [1] menguraikan bahwa untuk kasus r<0 didapatkan solusi yang tidak stabil, yaitu tidak mengarah pada titik kesetimbangan tertentu. Himpunan grafik solusinya adalah sebagai berikut (Gambar 5):



Gambar 5. Solusi Model Pertumbuhan Logistik dengan *r* < 0

Model pertumbuhan logistik secara umum hanya menggambarkan pertumbuhan populasi dalam jangka waktu tertentu. Dari model pertumbuhan ini dikembangkan model pemanenan, sehingga dapat diprediksi jumlah pemanenan maksimum yang bisa dilakukan

PEMBAHASAN

Untuk mengetahui pengaruh adanya kegiatan pemanenan ikan terhadap populasi ikan, dalam makalah ini akan dibahas pengaruh adanya pemanenan khususnya pemanenan dengan laju pemanenan proposional (*The harvesting equation with proportional harvesting rate*)

Model pemanenan berdasarkan model pertumbuhan logistik menurut Idels [4] dinamakan Model Pemanenan Schaefer.

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)F(N(t),t) - Y(t) \tag{4}$$

dengan $F(N(t),t) = \dfrac{K - N(t)}{K}$ (5)

maka diperoleh $\dfrac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left[1 - \dfrac{N(t)}{K}\right] - Y(t)$ (6)

dimana N(t) adalah jumlah populasi ikan dalam waktu t, r adalah laju pertumbuhan ikan, K adalah kapasitas pembawaan (daya dukung lingkungan), dan asumsikan bahwa $r \geq 0$ dan $K \geq 0$ konstan, sedangkan Y(t) merupakan fungsi laju pemanenan

Model Pemanenan Dengan Laju Pemanenan Proposional

Model pemanenan proposional mengasumsikan bahwa laju pemanenan berubah secara konstan setiap tahun. Sehingga dari persamaan (6) diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right] - \lambda Y(t) \tag{7}$$

dimana λ adalah laju proposional dengan $0 \leq \lambda \leq 1$ konstan

Fungsi laju pemanenan Y(t) menurut (Idels [1]) didefinisikan sebagai

$$Y(t) = qN(t)E \tag{8}$$

dimana $q \geq 0$ adalah koefisien katabilitas, yaitu nilai proposional dari populasi ikan setiap unit usaha. $E \geq 0$ adalah fungsi usaha, intensitas aktivitas manusia dalam penangkapan ikan.

Dalam model pemanenan tradisional, usaha penangkapan E adalah ekpresi sederhana dari fungsi waktu $E = E(t)$, yang mana bukan efek dari melimpahnya populasi ikan dalam usaha penangkapan, tetapi besar kecilnya intensitas penangkapan dalam waktu t. Mengingat bahwa pertumbuhan jumlah populasi ikan dipengaruhi oleh tingkat kelahiran dan kematian , maka asumsikan bahwa E merupakan fungsi dari populasi dinamik.

$$E(t, N(t)) = \alpha(t) - \beta(t)\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} \tag{9}$$

Dengan : $\alpha(t)$ = tingkat kematian

$\beta(t)$ = tingkat kelahiran

$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}$ = laju pertumbuhan per individu

dimana $\alpha(t) \geq 0$ dan $\beta(t) \geq 0$ adalah fungsi kontinyu dalam t. Kemudian persamaan (9) disubtitusikan dalam persamaan (8), maka diperoleh

$$Y(t) = qN(t)(\alpha(t) - \beta(t)\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}) \tag{10}$$

Persamaan (10) disubtitusikan ke persamaan (7)

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right] - \lambda qN(t)(\alpha(t) - \beta(t)\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}) \tag{11}$$

Asumsi bahwa $\alpha(t)$ dan $\beta(t)$ konstan, maka persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{1-\lambda q\beta}N(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right] - \frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta}N(t) \tag{12}$$

dengan $\lambda q\beta \neq 1$

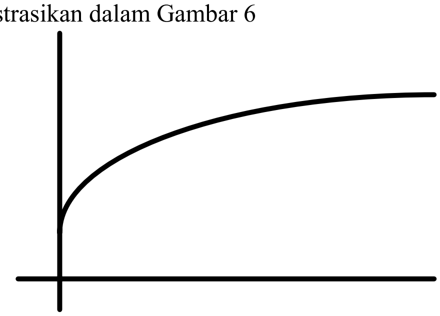
Solusi umum dari persamaan diatas dengan $N(t_o) = N_0$, r dan K konstan

$$\mathrm{N}(t) = \frac{No\,K\,(-r+\lambda\,\alpha\,q)}{\mathrm{e}^{\left(-\frac{(-r+\lambda\,\alpha\,q)\,t}{-1+\lambda\,q\,\beta}\right)}K\,\lambda\,\alpha\,q - No\,r - \mathrm{e}^{\left(-\frac{(-r+\lambda\,\alpha\,q)\,t}{-1+\lambda\,q\,\beta}\right)}r\,K + \mathrm{e}^{\left(-\frac{(-r+\lambda\,\alpha\,q)\,t}{-1+\lambda\,q\,\beta}\right)}No\,r} \tag{13}$$

dimisalkan $f = -r + \lambda\alpha q$ dan $g = -1 + \lambda q\beta$, maka persamaan (13) dapat disederhanakan

$$N(t) = \frac{N_0Kf}{e^{\left(-\frac{f}{g}t\right)}K\lambda\alpha q - N_0r - e^{\left(-\frac{f}{g}t\right)}rK + e^{\left(-\frac{f}{g}t\right)}N_0r} \tag{14}$$

Grafik solusi untuk N(t) dapat diilustrasikan dalam Gambar 6



Gambar 6. Grafik solusi N(t) dengan laju pemanenan proposional

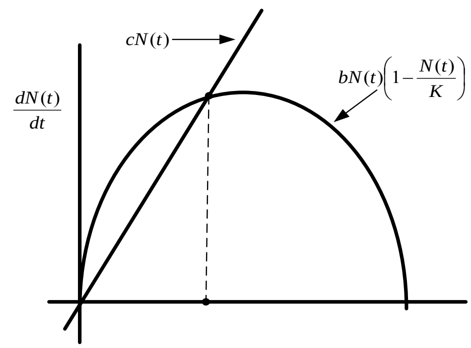
Analisa Kestabilan

Titik keseimbangan dari model ini diperoleh dari perpotongan grafik pemanenan dengan grafik pertumbuhan dalam bidang fase gambar 7 berikut :
Dari persamaan (12) dimisalkan

$$b = \frac{r}{1-\lambda q\beta} \tag{15}$$

$$c = \frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta} \tag{16}$$

Maka diperoleh $$\frac{dN(t)}{dt} = bN(t)\left[1-\frac{N(t)}{K}\right] - cN(t) \tag{17}$$



Gambar 7. Bidang fase pemanenan proposional

Titik potong grafik laju pemanenan dan pemanenan proposional adalah

$$N_1 = 0 \text{ dan } N_2 = \left(1-\frac{\lambda q\beta}{r}\right)K \tag{18}$$

Laju pertumbuhan populasi ikan maksimum dapat diketahui dengan menggunakan turunan pertama persamaan (12) terhadap N(t) sama dengan nol.
Dari persamaan (12) dapat diturunkan

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{1-\lambda q\beta}N(t)\left[1-\frac{N(t)}{K}\right] - \frac{\lambda q\alpha}{1-\lambda q\beta}N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r-\lambda q\alpha}{(1-\lambda q\beta)}N(t) - \frac{r}{(1-\lambda q\beta)K}N(t)^2 \tag{19}$$

turunan pertama dari persamaan (18) adalah

$$\frac{d\left(\frac{dN(t)}{dt}\right)}{dN(t)} = \frac{r-\lambda q\alpha}{(1-\lambda q\beta)} - \frac{2r}{(1-\lambda q\beta)K}N(t) = 0 \tag{20}$$

$$\frac{r-\lambda q\alpha}{(1-\lambda q\beta)} - \frac{2r}{(1-\lambda q\beta)K}N(t) = 0$$

maka diperoleh $$N(t) = \frac{K}{2}\left(1-\frac{\lambda q\alpha}{r}\right) \tag{21}$$

turunan kedua daripersamaan (12) adalah

N N2

$$\frac{d^2\left(\frac{dN(t)}{dt}\right)}{dN(t)^2} = -\frac{2r}{K(1-\lambda q\beta)} < 0 \tag{22}$$

fungsi laju pertumbuhan mempunyai nilai maksimum pada saat $N(t) = \frac{K}{2}\left(1-\frac{\lambda q\alpha}{r}\right)$.

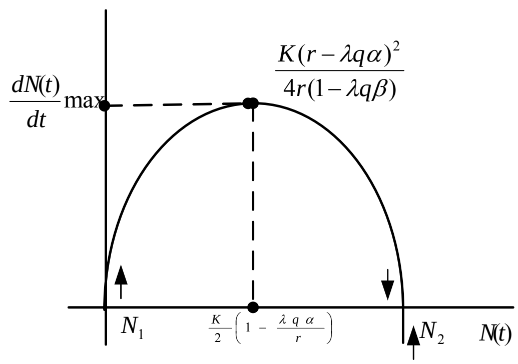
Nilai $N(t)=\frac{K}{2}\left(1-\frac{\lambda q\alpha}{r}\right)$ disubsitusikan dalam persamaan (18)

$$\frac{dN(t)}{dt}\max=\frac{r-\lambda q\alpha}{(1-\lambda q\beta)}\left(\frac{K}{2}\left(1-\frac{\lambda q\alpha}{r}\right)\right)-\frac{r}{(1-\lambda q\beta)K}\left(\frac{K}{2}\left(1-\frac{\lambda q\beta}{r}\right)\right)^2$$

$$\frac{dN(t)}{dt}\max=\frac{r-\lambda q\alpha}{(1-\lambda q\beta)}\left(\frac{K}{2}\left(\frac{r-\lambda q\alpha}{r}\right)\right)-\frac{r}{(1-\lambda q\beta)K}\left(\frac{K}{2}\left(\frac{r-\lambda q\beta}{r}\right)\right)^2$$

$$\frac{dN(t)}{dt}\max=\frac{(r-\lambda q\alpha)^2K}{(1-\lambda q\beta)2r}-\frac{r}{(1-\lambda q\beta)K}\frac{K^2}{4}\frac{(r-\lambda q\beta)^2}{r^2}$$

$$\frac{dN(t)}{dt}\max=\frac{K}{4r}\frac{(r-\lambda q\alpha)^2}{(1-\lambda q\beta)} \tag{23}$$



Gambar 8. Laju Pertumbuhan Maksimum Adanya Pemanenan

$$\frac{dN(t)}{dt}>0\rightarrow N_1<N(t)<N_2$$

$$\frac{dN(t)}{dt}<0\rightarrow N(t)<N_1 atau N(t)>N_2$$

Dari gambar 8 pada saat jumlah populasi N(t) sebesar $\frac{K}{2}\left(1-\frac{\lambda q\alpha}{r}\right)$ laju pertumbuhan populasi ikan dengan adanya pemanenan mencapai nilai maksimum sebesar $\frac{K}{4r}\frac{(r-\lambda q\alpha)^2}{(1-\lambda q\beta)}$.

Berdasarkan Gambar 8 diketahui bahwa N_1 merupakan titik keseimbangan tidak stabil dan N_2 titik keseimbangan stabil. Untuk menjaga populasi tetap stabil maka pemanenan dilakukan di titik stabilnya, maka nilai

$N_2 > 0$ atau $\lambda q\beta<r$ (24)

Pemanenan disekitar daerah kesetimbangan yang berarti nilai $\frac{dN(t)}{dt}=0$

$$Y(t)=\lambda qN(\alpha(t)-\beta(t)\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}) \tag{25}$$

Sehingga diperoleh $Y(t)=\lambda q\alpha N(t)$ (26)

Untuk menjaga keseimbangan populasi maka pemanenan dilakukan disekitar $N(t)=N_2$ maka

$$Y = \lambda q\alpha N_2 = \lambda q\alpha K\left(1 - \frac{\lambda q\alpha}{r}\right) \tag{27}$$

$$Y = \lambda q\alpha K - \frac{K}{r}(\lambda q\alpha)^2 \tag{28}$$

Jika $\dfrac{dY}{d(\lambda q\alpha)} = 0$ maka

$$K - \frac{2K}{r}(\lambda q\alpha) = 0 \tag{29}$$

$$K = \frac{2K}{r}(\lambda q\alpha) \tag{30}$$

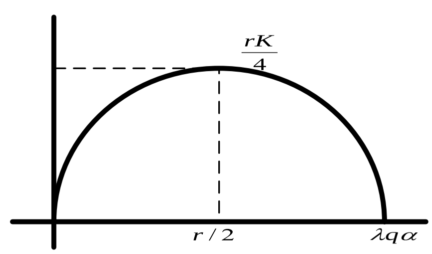
sehingga diperoleh $\lambda q\alpha = \dfrac{r}{2}$ (31)

Persamaan (30) disubsitusikan dalam persamaan (27) diperoleh

$$Y\max = \frac{r}{2}K - \frac{K}{r}\left(\frac{r}{2}\right)^2 \tag{32}$$

$$Y\max = \frac{rK}{2} - \frac{rK}{4}$$

$$Y\max = \frac{rK}{4} \tag{33}$$



Gambar 8. Grafik Laju Pemanenan Proposional Maksimum

KESIMPULAN

Untuk mencegah kepunahan model pemanenan ikan dengan laju pemanenan proposional dilakukan dalam interval $0 < N(t) < N_2$ atau $0 < N(t) < \left(1 - \dfrac{\lambda q\alpha}{r}\right)K$. Pemanenan disekitar titik kesetimbangan stabil mengijinkan pemanenan maksimum yang bisa dilakukan pada saat $\lambda q\alpha = \dfrac{r}{2}$ dengan $Y\max = \dfrac{rk}{4}$

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Boyce, William E. and. Diprima, Richard C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.

[2]. Fulford, Glenn, *Modelling with Differential and Difference Equations*, Cambrigde University Press, Cambrigde, 1997.

[3]. Haberman, Richard, Mathematical Models: Mechanical Vibrations,Population Dynamics, and Traffic Flow. *Society for Industrial and AppliedMathematics*, Philadelphia, 1998.

[4]. Idels, Lev V and Mei Wang, Harvesting Fisheries Management Strategies with Modified Effort Function, *IJMC jurnal dalam Modelling Complex systems*, 2006.

Ymax