REDUKSI ORDE PLANT DENGAN PENDEKATAN NORM HANKEL OPTIMAL

Dhimas Mahardika, R Heri S.U
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Semarang
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang, 50275

Abstrak: Makalah ini mengemukakan pendekatan Norm Hankel Optimal (Optimal Norm Hankel Approximation (OHNA)) untuk mereduksi plant dari system linear yang tak berubah terhadap waktu. Dalam teori kendali, yang dimaksud dengan plant adalah obyek yang dikendalikan, kemudian akan diteliti sifat-sifat dari plant tereduksi. Selanjutnya akan dikaji juga kesalahan reduksi dengan menggunakan norm-H_∞

Kata Kunci: Plant Tereduksi, Metode pendekatan Norm Hankel Optimal (OHNA), Norm H_∞

PENDAHULUAN

Pada dasarnya untuk menentukan pengendali yang berorde rendah dapat dicari lewat dua cara/alternatif. Cara pertama yaitu dengan mereduksi plant yang berorde tinggi lalu didapatkan suatu pengendali yang berorde tinggi, kemudian dari pengendali berorde tingggi direduksi dengan menggunakan teknik H_∞ untuk menentukan pengendali yang berorde rendah. Cara kedua dilakukan dengan mereduksi plant yang berorde tinggi. Lalu didapatkan plant berorde rendah dan juga dengan menggunakan teknik H_∞ dirancang pengendali berorde rendah. Untuk selanjutnya kita bandingkan cara pertama dan kedua. Dan cara/alternatif yang terkait dengan pembahasan ini adalah cara yang kedua yaitu bagaimana mereduksi plant berorde tinggi dengan menggunakan metode Pendekatan Norm Hankel Optimal (OHNA). Dan lebih lanjut akan dianalisis tentang kesalahan reduksi, metode pendekatan dan mengkaji syarat perlu dan cukup untuk kesetimbangan dan kestabilandari plant yang tereduksi.

PERMASALAHAN

Misalkan G adalah fungsi alih dan persamaan dinamiknya sebagai berikut :

$$x = Ax+Bu\ ,\ \ x(t_0)=x_0$$
$$y = Cx+Du$$

dimana $x(t)\ \epsilon\ R^n$ disebut variable keadaan, $x(t_0)$ disebut kondisi awal, $u(t)\ \epsilon R^m$ disebut input system, dan $y(t)\ \epsilon\ R^p$ disebut output system., A,B,C,D adalah matriks riil konstan dengan :
A $\epsilon\ R^{nxn}$,$B\ \epsilon\ R^{nxm}$,$C\ \epsilon\ R^{pxn}$,$D\ \epsilon\ R^{pxm}$,Maka akan ditentukan plant berorde r(r<n),dengan persamaan dinamik sebagai berikut:

$$x_r(t)\ = A_rx_r(t) + B_ru_r(t)\ ,\ \ x_r\ (t_0) =x_{r(0)}$$
$$y_r(t) = C_rx_r(t) + D_ru_r(t)$$

PENDEKATAN NORM HANKEL OPTIMAL

Pendekatan Norm Hankel Optimal adalah mencari $\overline{G}\ \in\ RH_\infty$ dari derajat Mcmillan $r<n$ sehingga meminimalkan $||G_n(s)- \overline{G}_r(s)||_H$, sedemikian sehingga $||G_n(s)- \overline{G}_r(s)||_H = \sigma_{r+1}(G)$. Dan hal ini merupakan kasus optimal karena $\sigma_{r+1}(G)$ adalah batas bawah dari Hankel norm, dengan $\sigma_{r+1}=\sqrt{\lambda_{r+1}(PQ)}$

Definisi 1. Misalkan $G(s) = C(sI-A)^{-1} B + D$ maka norm Hankel dari $G(s)$ didefinisikan sebagai :

$$||G(s)||_H = \overline{\sigma}\ (PQ)$$

Dengan σ adalah nilai singular terbesar dari $P\ Q$, dengan :

$$P = \int_0^\infty e^{(At)} BB^T e^{(A^T t)}\, dt \qquad\qquad Q = \int_0^\infty e^{(A^T t)} C^T C e^{(At)}\, dt$$

Teorema 1. Misalkan realisasi setimbang (A,B,C,D) memenuhi :

$$AP^T + PA^T + BB^T = 0$$
$$A^T Q + QA + C^T C = 0$$

Untuk $P=Q=\Sigma=$diagonal(Σ_1, Σ_2),

Dengan $\Sigma_1 = diagonal\ (\sigma_1, \ldots, \sigma_r, \sigma_{r+m+1}, \ldots, \sigma_n)$,

$\Sigma_2 = diagonal\ (\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{r+m})$, $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2}$

$= \ldots = \sigma_{r+m} > \sigma_{r+m+1} \geq \sigma_n > 0$, $\delta(\Sigma_1^2 - \sigma^2_{r+1} I) = 0$

Partisi (A,B,C) yang bersesuaian dengan partisi Σ adalah :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

Dan didefinisikan $\overline{A} = E^{-1}(\sigma^2_{r+1} A^T_{11} + \Sigma_1 - \sigma_{r+1} C_1^T U B_1^T)$,

$\overline{B} = E^{-1}(\Sigma_1 B_1 + \sigma_{r+1} C_1^T U)$,

$\overline{C} = C_1 \Sigma_1 + \sigma_{r+1} U B_1^T$

$\overline{D} = D - \sigma_{r+1} U$

Dengan $\boldsymbol{U}$ adalah matriks orthogonal yang memenuhi $\boldsymbol{B = C_2^T U}$ dan $\boldsymbol{E = \Sigma_1^2 - \sigma^2_{r+1} I}$.

Juga didefinisikan sistem kesalahan sebagai berikut :

$$Ae = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix} \qquad Be = \begin{bmatrix} B \\ \overline{B} \end{bmatrix} \qquad Ce = \begin{bmatrix} C & \overline{C} \end{bmatrix} \qquad De = \begin{bmatrix} D & \overline{D} \end{bmatrix}$$

Maka :

1. (Ae,Be,Ce) memenuhi

   $AePe + PeAe^T + BeBe^T = 0$, $Ae^T Qe + QeAe + Ce^T Ce = 0$

   Dengan :

$$Pe = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & I \\ 0 & \sigma_{r+1} I & 0 \\ I & 0 & \Sigma_1 E^{-1} \end{bmatrix} \qquad Qe = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & -E \\ 0 & \sigma_{r+1} I & 0 \\ -E & 0 & \Sigma_1 E \end{bmatrix}$$

   $PeQe = \sigma^2_{r+1} I$.

2. Definisikan

   $\varepsilon(s) = Ce(sI - Ae)^{-1} Be + De$ maka $\varepsilon(s) = \varepsilon(-s)^* = \sigma^2_{r+1} I$

3. Jika $\delta(A)=0$ maka

   a. $\delta(\overline{A}) = 0$

   b. $\delta(\Sigma_1^2) = 0$ maka $In\ \overline{A} = In(\Sigma_1^2 E)$

   c. Jika P>0, Q>0 maka orde dari bagian stabil dari realisasi $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = \pi(\Sigma_1 E)$

   d. Jika salah sati dari :

   - $\Sigma_1 E > 0$, atau
   - $\Sigma_1 E < 0$, maka$(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ adalah realisasi minimal

Lemma 1. Diberikan Fungsi alih $G(s) \in RH_\infty$ dengan nilai singular $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \sigma_n$ dengan $\sigma_i \geq \sigma_{i+1} > 0$,

$i = 1,2,..,n-1$ maka $V\ \overline{G}_r(s)$ stabil $(r<n)$, $||G_n(s) - \overline{G}_r(s)||_H \geq \sigma_{r+1}$.

Bukti : Misalkan$(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$realisasi minimal dari $\overline{G}_r(s)$dan (Ae,Be,Ce)adalah realisasi dari$(G_n(s) - \overline{G}_r(s))$

Misalkan pula $Pe=Pe^T$ dan $Qe=Qe^T$, $P>0\ A \geq 0$ yang memenuhi :

$AePe + PeAe^T + BeBe^T = 0$, $Ae^T Qe + QeAe + Ce^T Ce = 0$

Selanjutnya tulis :

Pe = $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P^T{}_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$, Qe= $\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q^T{}_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}$

Matriks P dapat difaktorkan memjadi $P=MM^T$

Dimana M= $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$, Dengan $M_{22}=P_{22}{}^{1/2}$, $M22=P_{12}P_{22}{}^{-1/2}$

$M_{11}M_{11}{}^T = P_{11} - M_{12}M_{12}{}^T$

$||G_n(s) - \breve{G}_r(s)||^2{}_H = \lambda_{max} (PQ) = \lambda_{max} (MM^TQ)= \lambda_{max} (M^TQM)$

$\geq \lambda_{max} (\begin{bmatrix} M^T{}_{11} & 0 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} M_{11} \\ 0 \end{bmatrix})= \lambda_{max} (M_{11}{}^TQ_{11}M_{11})$

$= \lambda_{max} (Q_{11}M_{11}M_{11}{}^T)= \lambda_{max} (Q_{11}(P_{11}-M_{12}M_{12}{}^T))$

$= \lambda_{max} (Q^{1/2}P_{11}Q_{11}{}^{1/2})-XX^T), X=Q_{11}{}^{1/2}M_{12}$

$\geq \sigma^2{}_{r+1}(G(s))$

Dimana $M_{11}{}^TQ_{11}M_{11}\geq 0$ adalah sub matriks dari $M^TQM\geq 0$

Teorema 2. Diberikan $G(s)\in RH_\infty$ berorde n, maka :

$$\sigma_{r+1}(G(s))= \inf_{FG(s)\in RH_\infty^-} ||G(jw)- \overline{G}(jw)-F(jw)||_\infty, \text{ orde dari } G \leq r$$

Dalam kasus norm Hankel Optimal yang dicari adalah $\overline{G}(s)\in RH_\infty \ni ||G_n(s)- \overline{G}r(s)||_H= \sigma_{r+1}$(G(s))

Hal ini disebut kasus optimal karena σ_{r+1} adalah batas bawah dari kesalahan reduksi dengan OHNA.

Adapun syarat perlu dan cukup agar $\overline{G}_r(s)$ pendekatan optimal Hankel untuk satu kelas diberikan pada teorema berikut :

Teorema 3. Diberikan fungsi alih $G_n(s)=C(sI-A)^{-1}B$, $G_n(s) \in RH_\infty$. Jika $G_n(s)$ mempunyai nilai singular Hankel

$\sigma_1\geq \sigma 2...\geq \sigma_r> \sigma_{r+1}= ... = \sigma_{r+2} ...= \sigma_{r+m+1}> \sigma_{r+m+1}\geq...\geq \sigma_n>0$, maka $G(s)$ (berorde r)adalah pendekatan norm Hankel optimal untuk $G(s)$ jika dan hanya jika $F(s) \in RH_\infty$ *(dapat dipilih orde dari* $F(s)<n+r-1) \ni \varepsilon(s) = G(s)- \overline{G}(s)-F(s)$ yang memenuhi *:*

$\varepsilon(s)= \varepsilon^*(-s)= \sigma^2{}_{r+1}I$, dengan $\varepsilon(s)= Ce(sI-Ae)^{-1} Be + De$

Bukti : $||G(jw)- \overline{G}(jw)-F(jw)||_\infty \geq ||G(s) - \overline{G}(s)||_H \geq \sigma_{r+1}$(G(s)).

Karena $\varepsilon(s)= \varepsilon(-s)^*= \sigma^2{}_{r+1}I$ dari persamaan diatas diperoleh $||G(s) - \overline{G}(s)||_H = \sigma_{r+1}$

Jadi $\breve{G}(s)$ adalah pendekatan optimal norm hankel dari $G(s)$.

Misalkan $\overline{G}(s)$ berorde k adalah optimal norm hankel dari $G(s)$, sehingga $||G(s) - \overline{G}(s)||_H = \sigma_{r+1}$ Teorema 1 dapat diaplikasikan pada $(G(s) - \overline{G}(s))$ untuk menghasilkan pendekatan optimal anticausal $F(s)$,sehingga $(G(s) - \overline{G}(s)-F(s))/ \sigma_{r+1}(G)$ adalah allpass karena $\sigma_{r+1}(G)= \sigma_1 (G - \overline{G})$. Selanjutnya orde dari $F(s)$ini adalah orde dari $(G(s) - \overline{G}(s))$ dikurangi multiplisitas dari $\sigma_1(G(s) - \overline{G}(s))$

Jadi orde dari $F(s)\leq n+r-1$

Pada pendekatan norm hankel optimal $\overline{G}(s)$ dapat dikonstruksi sebagi berikut :

Misalkan (A,B,C,D) realisasi setimbang yang berkorespondensi dengan :

$\Sigma = diagonal (\sigma_1,\sigma_2,..., \sigma_r, \sigma_{r+m+1,...,} \sigma_{n,}, \sigma_{r+1,..,} \sigma_{r+m}), dan (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ maka :

$$\overline{G}(s)+F(s)=\overline{D}+\overline{C}(sI-\overline{A})^{-1}\overline{B},$$

Dengan $\overline{G}(s) \in RH_\infty$ dan $F(s) \in RH_\infty$ Jadi $\overline{G}(s)$ adalah stabil asimtotik, sedangkan $F(s)$ adalah antistabil, yaitu fungsi dengan semua pole di setengah bidang buka bagian kanan.

KESALAHAN REDUKSI

Didefinisikan sistem kesalahan sebagai berikut :

$$Ae=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix} \quad Be=\begin{bmatrix} B \\ \overline{B} \end{bmatrix} \quad Ce=\begin{bmatrix} C & \overline{C} \end{bmatrix} \quad De=\begin{bmatrix} D & \overline{D} \end{bmatrix}$$

Maka :

(Ae,Be,Ce) memenuhi $AePe+PeAe^T+BeBe^T=0$, $Ae^TQe+QeAe+Ce^TCe=0$

Dengan :

$$Pe=\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & I \\ 0 & \sigma_{r+1}I & 0 \\ I & 0 & \Sigma_1 E^{-1} \end{bmatrix} \qquad Qe=\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & -E \\ 0 & \sigma_{r+1}I & 0 \\ -E & 0 & \Sigma_1 E \end{bmatrix}$$

$PeQe=\sigma^2_{r+1}I.$

Lemma 1. Diberikan fungsi alih $G(s) \in RH_\infty$ dengan nilai singular

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \ldots \sigma_n$, *dengan* $\sigma_i \geq \sigma_{i+1} > 0$, $i=1,2,\ldots,n-1$ *maka* $V\ \overline{G}_r(s)$ *stabil*$(r<n)$,
$||G_n(s) - \breve{G}_r(s)||_H \geq \sigma_{r+1}$

Bukt i: Misalkan $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ Realisasi minimal dari $\overline{G}_r(s)$, dan (Ae,Be,Ce) adalah realisasi dari $(G_n(s) - \overline{G}_r(s))$. Misalkan pula $Pe=Pe^T$ dan $Qe=Qe^T$, $P>0$, $A\geq 0$ Yang memenuhi :

$$AePe+PeAe+BeBe^T=0,$$
$$Ae^TQe+QeAe+Ce^TCe=0.$$

Dan kesalahan reduksi dari metode OHNA ini jika nilai singular Hankel yang lebih kecil dari σ_r berbeda semua, maka : $||G_n(s) - \overline{G}_r(s)||_\infty \leq \sigma_{r+1,\ldots}, \sigma_n.$

PENUTUP

Dalam makalah ini telah dibahas pendekatan Norm Hankel Optimal untuk mereduksi orde plant. Plant tereduksi yang diperoleh dengan pendekatan tersebut menyertakan sifat-sifat plant semula. Batas atas terkecil dari kesalahan reduksi adalah jumlah dari sisa nilai singular Hankel yang tereduksi.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Colaneri, P, Geromel, J.C, and Locatelli, A, *Control Theory and Design : An* RH_2 *and* RH_∞ *Viewpoint*, Academic Press, 1997

[2]. Gawronski, W, 1996, Balanced Control of Flexible Structures, *Springer*-Verlag London Limited.

[3]. Green, M. Limebeer, D.J.N, *Linear Robust Control,* Prentice Hall, Inc, 1995.

[4]. Saragih R, dan Yoshida, K, Reduced Orde Controller of Transverse-Torsional coupled Vibration Based on Linear Matrix Inequalities, *Journal of Vibration and Control,* Sage Publications, Inc, 5, pp. 907-923,1999.

[5]. Widowati, *Perancangan Pengontrol Berorde Minimum Melalui Reduksi Orde Plant Dengan Pertubasi Singular*, Tesis magister ITB, 2000.

[6]. Widowati dan Saragih, R, Perancangan berorde Minimum Melalui Reduksi Orde Plant*, Majalah Ilmiah Himpunan Matematika Indonesia*, Vol. 7, No. 2, 2001.

[7]. Widowati, Sutimin, dan Aris, P. W, *Aplikasi Pengontrol H_∞ Untuk meredam Getaran Pada Bangunan Bertingkat,* UNDIP, 2002.

[8]. Zhou, K. dan Doyle, J.C, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, Inc, 1998.