Prosiding SPMIPA; pp: 22-24; 2006 ISBN: 979.704.427.0

# PRINSIP MAKSIMOVA UNTUK LOGIKA FLw,gc

Bayu Surarso
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Semarang
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang, 50275

**Abstrak:** Pada umumnya tulisan tentang Prinsip Maksimova menggunakan pendekatan semantik dalam pembahasannya. Pada [2], penulis memperkenalkan suatu pendekatan sintaktik untuk membuktikan Prinsip Maksimova pada beberapa logika substructural. Pada [4] metode tersebut dimodifikasi untuk membuktikan PM pada logika-logika tanpa aturan "weakening" FLg(n $\rightarrow$1) dan FL(n $\rightarrow$1), dengan n>1. Pada tulisan ini, dengan ide yang sama, tetapi dengan beberapa modifikasi di metodenya, dibuktikan bahwa Prinsip Maksimova berlaku pada logika FLw,gc yang memuat aturan "weakening".

**Kata Kunci:** Prinsip Maksimova, teorema eliminasi cut, teorema interpolasi, FL, global contraction

## PENDAHULUAN

Prinsip Pemisahan Variabel Maksimova, atau secara singkat disebut Prinsip Maksimova (PM), dikemukakan oleh Maksimova pada [1]. Prinsip tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan dalam suatu logika L formula $A1 \supset A2$ dan $B1 \supset B2$ tidak mempunyai variabel yang sama. Maka pada L berlaku sifat: Bila formula $A1 \wedge B1 \supset A2 \vee B2$ dapat dibuktikan, maka formula $A1 \supset A2$ dapat dibuktikan atau formula $B1 \supset B2$ dapat dibuktikan.

Pada logika-logika yang diformulasikan menggunakan "Sequent Kalkulus", PM dapat dituliskan sebagai pernyataan seperti berikut: Misalkan formula $A1 \supset A2$ dan $B1 \supset B2$ tidak mempunyai variabel yang sama. Maka, apabila sequent $A1 \wedge B1 \rightarrow A2 \vee B2$ dapat dibuktikan, sequent $A1 \rightarrow A2$ atau $B1 \rightarrow B2$ juga dapat dibuktikan.

Pada [4], Penulis dan H. Ono memperkenalkan aturan g(n $\rightarrow$k) dan membuktikan bahwa teorema eliminasi cut berlaku paka logika FLg(n $\rightarrow$k), yaitu logika yang diperoleh dengan menambahkan aturan g(n $\rightarrow$k) pada logika FL, bila k = 1. Dengan menggunakan sifat ini penulis di [4] membuktikan bahwa PM berlaku pada FLg(n $\rightarrow$1). Cara pembuktiannya, pada prinsipnya, adalah dengan menganalisa "bukti" yang tak memuat aturan "cut" dari sequent $A1 \wedge B1 \rightarrow A2 \vee B2$ dan mempelajari bagaimana sequent tersebut diturunkan. Dengan cara tersebut akan terlihat mengapa PM berlaku pada FLg(n $\rightarrow$k).

Pada tulisan ini, dengan menggunakan ide yang sama dengan ide pada [4] tetapi sedikit memodifikasi cara pembuktiannya, ditunjukkan bahwa PM berlaku untuk logika FLw,gc. Logika tersebut bisa didapat dengan menambahkan aturan "weakening" pada FLg(n $\rightarrow$1) untuk n=2.

## FORMULASI "GENTZEN SEQUENT" FLw,gc

Pada tulisan ini dianggap pembaca sudah familiar dengan formulasi "Gentzen sequent" FL (lihat [4]) yang dijadikan sebagai formulasi dasar. Logika FLw,gc dapat diperoleh dari FL dengan menambah aturan "weakening" dan "global contraction", disingkat gc, seperti berikut:

$$\frac{\Delta_1;\Delta_2 \rightarrow D}{\Delta_1;A;\Delta_2 \rightarrow D}(weak \rightarrow) \qquad \frac{\Delta \rightarrow}{\Delta \rightarrow D}(\rightarrow weak)$$

$$\frac{\Delta_1;\Gamma;\Gamma;\Delta_2 \rightarrow D}{\Delta_1;\Gamma;\Delta_2 \rightarrow D}(gc)$$

Disini huruf besar Yunani seperti $\Delta, \Gamma, \Delta_1, \Delta_2$, dan $\Sigma$ dipakai sebagai notasi untuk deretan-deretan hingga dari formula-formula yang dipisahkan oleh semikolon.

Dalam formulasi FLw,gc yang dibahas, diperbolehkan adanya konstanta-konstanta logika, sehingga selain $A \to A$, FLw,gc juga mempunyai sequent awal (initial sequent) berbentuk $\Delta_1; \bot; \Delta_2 \to$ dan $\Delta \to \mathrm{T}$.

Untuk pembahasan lebih lanjut perlu diingat beberapa pengertian dasar sebagai berikut:

**Definisi 1.** Suatu **bukti** P adalah suatu pohon sequent yang memenuhi syarat-syarat berikut:
1. Sequent-sequent yang terletak paling atas adalah sequent-sequent awal,
2. Setiap sequent di P, kecuali sequent yang paling bawah, adalah suatu sequent atas (upper sequent) dari aplikasi dari suatu aturan inferensi (rule of inferensi) yang sequent bawahnya (lower sequent) juga di dalam P.

Berikut suatu contoh bukti dari sequent $A; A \supset B; C \supset A \to C \supset B$ :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C \to C \qquad \dfrac{A \to A \qquad B \to B}{A \supset B; A \to B}}{\mathrm{A \supset B; C \supset A, C \to B}}}{A \supset B; C \supset A \to C \supset B}}{A, A \supset B; C \supset A \to C \supset B}$$

**Definisi 2.** Bukti dari suatu formula *A* adalah suatu **bukti** P dengan sequent terbawahnya (lowest sequent) adalah sequent $\to A$.

## PEMBUKTIAN PRINSIP MAKSIMOVA UNTUK FLw,gc

Berikut akan ditunjukkan bahwa PM berlaku pada FLw,gc. Sebelumnya perlu diingat bahwa teorema eliminasi "cut" berlaku pada logika FLw,gc (lihat [5]). Dengan menggunakan sifat ini PM untuk FLw,gc akan dibuktikan dengan metode pada [4], namun aturan "weakening" akan menimbulkan beberapa kesulitan. Untuk mengatasi hal tersebut akan dipelajari bagaimana sequent $A1; \mathrm{B1} \to \mathrm{A2} \vee B2$ diturunkan pada **bukti** yang tak memuat aturan "cut". Dari sini baru diturunkan PM untuk FLw,gc.

Lemma berikut adalah suatu bentuk khusus dari teorema interpolasi. Lemma tersebut akan digunakan dalam membuktikan PM untuk FLw,gc. Teorema interpolasi untuk FLw,gc sendiri dapat dibuktikan dengan sedikit memodifikasi metode pembuktian standard, menggunakan metode Maehara, lihat misalnya di [3].

**Lemma 1.** Misalkan $\mathrm{T}, \Sigma$ dan $\Delta$ adalah barisan hingga formula dan E adalah suatu formula. Andaikan $\Sigma$ dan $\mathrm{T}$, $\Delta$, $\mathrm{E}$ tidak mempunyai variabel proposisi yang sama. Maka, apabila sequent $\Gamma; \Sigma; \Delta \to E$ dapat dibuktikan, $\Sigma \to$ atau $\Gamma; \Delta \to E$ juga dapat dibuktikan.

Dengan bantuan lemma di atas bisa dicek bahwa lemma berikut berlaku pada FLw,gc.

**Lemma 2.** Misalkan $A1 \supset A2$ dan $B1 \supset B2$ tidak mempunyai variabel proposisi yang sama dan misalkan $\Delta$ adalah sebarang barisan hingga (bisa kosong) subformula dari *A1* atau *B1*. Bila sequent $\Delta \to A2 \vee B2$ dapat dibuktikan maka $\Delta \to A2$ atau $\Delta \to B2$ bisa dibuktikan.

*Bukti:* Lemma 2 dapat dibuktikan dengan menganalisa setiap kemungkinan bentuk dari **bukti** P untuk sequent $\Delta \to A2 \vee B2$ menggunakan induksi pada panjang P yang didefinisikan sebagai banyaknya sequent pada P. Pada tulisan ini hanya akan diberikan untuk kasus bila pada P aturan inferensi yang terbawah I bukan $(\vee \to)$. Pada kasus ini sequent atas dari I (atau salah satunya) akan berbentuk $\Delta' \to A2 \vee B2$, dimana $\Delta'$ merupakan deretan hingga subformula-subformula dari *A1* atau *B1*. Dengan hipotesa induksi $\Delta' \to A2$ atau $\Delta' \to B2$ dapat dibuktikan. Sehingga dengan mengaplikasikan I pada sequent tersebut didapat **bukti** dari $\Delta \to A2$ atau $\Delta \to B2$. □

Menggunakan kedua lemma di atas bisa didapat lemma berikut:

**Lemma 3.** Misalkan $A1 \supset A2$ dan $B1 \supset B2$ tidak mempunyai variabel proposisi yang sama. Maka berlaku sifat berikut:

Bila sequent $A1 * B1 \to A2 \vee B2$ dapat dibuktikan maka $A1 \to A2$ atau $B1 \to B2$ bisa dibuktikan.

*Bukti:* Mudah dibuktikan bahwa bila $A1*B1\to A2 \vee B2$ dapat dibuktikan, dari **bukti** sequent tersebut bisa diturunkan **bukti** dari $A1;B1\to A2 \vee B2$. Sehingga, berdasar Lemma 2, sequent $A1;B1\to A2$ atau $A1;B1\to B2$ dapat dibuktikan. Kemudian dengan Lemma 1 dan mengaplikasikan aturan "weakening" bila perlu, $A1\to A2$ atau $B1\to B2$ dapat dibuktikan. ■

Akhirnya dari Lemma 3 didapatkan teorema berikut

**Teorema 4.** Prinsip Maksimove berlaku pada logika FLw,gc. Lebih jelasnya, misalkan *A1, A2, B1* dan *B2* formula-formula pada FLw,gc sedemikian hingga $A1 \supset A2$ dan $B1 \supset B2$ tidak mempunyai variabel proposisi yang sama. Maka berlaku sifat berikut:

Bila sequent $A1 \wedge B1 \to A2 \vee B2$ dapat dibuktikan maka $A1 \to A2$ atau $B1 \to B2$ bisa dibuktikan.

*Bukti:* Dengan menggunakan aturan "weakening" mudah dibuktikan bahwa sequent $A1*B1\to A1\wedge B1$ dapat dibuktikan. Sehingga, bila $A1\wedge B1\to A2 \vee B2$ dapat dibuktikan maka dengan mudah bisa didapat bukti dari $A1*B1\to A2 \vee B2$. Akhirnya dengan teorema 3.3, $A1\to A2$ atau $B1\to B2$ dapat dibuktikan. ■

## PUSTAKA


[1]. Maksimova, L., The Principle of Separation of Variables in Propositional Logics, *Algebra i Logika 15*, pp. 419-428, 1979.

[2]. Naruse, H., Surarso, B., and Ono, H., A Syntactic Approach to Maksivoma's Principle of Variable Separation for some Substructural Logics, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol 39, No 1, pp. 94-113, 1998.

[3]. Ono, H. and Komori, Y., Logics Without The Contraction Rule, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 50, pp. 169-201, 1985.

[4]. Surarso, B., Prinsip Maksimova untuk sistem-sistem logika FLg(n->1) dan FL(n->1), *Jurnal Matematika dan Komputer*, Vol. 1, No. 2, pp. 43-49, 1998.

[5]. Surarso, B. and Ono, H., Cut Elimination in Noncommutative Substructural Logics, *Reports on Mathematical Logic 30*, pp. 13-29, 1996.