

## SIFAT-SIFAT GRAF $\mathfrak{R}(2^n)$

Erly Listiyana<sup>1</sup> dan Susilo Hariyanto<sup>2</sup>  
<sup>1,2</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro  
Jln. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang

**Abstract.** A sequence of non negative integers  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  is said a sequence of graphic if it is the degree sequence of a simple graph  $G$ . In this case, graph  $G$  is called realization for  $d$ . The set of all realizations of non isomorphic 2-regular graph with order  $n$  ( $n \geq 3$ ) is denoted  $R(2^n)$ , whereas a graph with  $R(2^n)$  as set of their vertices is denoted  $\mathfrak{R}(2^n)$ . Two vertices in graph  $\mathfrak{R}(2^n)$  are called adjacent if one of these vertices can be derived from the other by *switching*. In the present paper, we prove that for  $n \geq 6$ ,  $\mathfrak{R}(2^n)$  is a connected and bipartite graph.

**Keywords:** Sequences of graphic, bipartite graph, realization, switching, connected graph.

### 1. PENDAHULUAN

Teori graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Salah satunya yaitu pada suatu perusahaan yang memiliki  $n$  pekerja dan perusahaan menginginkan mengatur pekerjaannya untuk tokonya dengan kondisi bahwa masing-masing toko harus mempunyai minimal tiga orang pekerja. Apabila ingin lebih efisien maka harus ditentukan pilihan dua toko dijadikan satu atau membagi satu toko menjadi dua toko. Untuk menyelesaikan masalah pengaturan pekerja di atas dapat digunakan graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  (realisasi dari 2-regular graf dengan  $n$  titik). Selanjutnya ide ini dapat digunakan untuk memperluas penyelesaian paling sedikit  $k$  masalah pekerja. Oleh karena itu graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  yang merupakan bentuk khusus dari graf  $\mathfrak{R}(d)$  menarik untuk di bahas.

### 2. DASAR TEORI

Misalkan  $G$  adalah graf dengan order  $n$  dan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  adalah himpunan titik dari  $G$ . Barisan  $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$  dikatakan barisan derajat dari  $G$ . Sebuah barisan bilangan bulat tak negatif

$d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$  adalah barisan grafik jika barisan ini merupakan barisan derajat dari suatu graf sederhana  $G$ . Dalam hal ini,  $G$  dikatakan realisasi dari  $d$ . Notasi  $R(d)$  adalah himpunan semua graf yang mempunyai barisan derajat  $d$ . Suatu graf dikatakan *r-regular* apabila setiap titik dari graf tersebut mempunyai derajat  $r$ . Barisan derajat dari suatu *r-regular* graf dengan  $n$  titik dinotasikan dengan  $d = r^n$ .

*Switching* pada graf  $G$  adalah suatu operasi penggantian dari sembarang dua garis  $ab, cd$  yang merupakan garis pada graf  $G$  dengan garis  $ac, bd$  yang bukan merupakan garis pada graf  $G$ . Graf yang di peroleh dari  $G$  dengan menghapus  $ab, cd$  dan mengganti garis  $ac, bd$  dinotasikan dengan  $G^\sigma$ . Operasi  $\sigma$  dikatakan operasi *switching*. Terlihat bahwa graf yang diperoleh dari  $G$  dengan suatu *switching* memiliki barisan derajat yang sama dengan  $G$ . Sehingga dapat dikatakan bahwa *switching* merupakan operasi yang mempertahankan derajat.

#### Definisi 1 [3]

Graf  $\mathfrak{R}(d)$  merupakan graf yang titik-titiknya berupa graf dari realisasi-realisasi barisan derajat  $d$  dan dua titik menjadi *adjacent* pada graf  $\mathfrak{R}(d)$  jika titik yang satu dapat diperoleh dari titik yang lain dengan suatu *switching*.



Sehingga  $k(G) = k(G^\sigma) - 1$

$$k(G^\sigma) - k(G) = 1$$

Oleh karena itu  $|k(G) - k(G^\sigma)| \leq 1$ . ■

Pada Teorema 3 dapat dilihat bahwa  $G_1, G_2 \in R(2^n)$  dan  $\sigma$  adalah sebuah *switching* sedemikian sehingga  $G_2 = G_1^\sigma$  kemudian kedua-duanya  $G_2$  adalah *isomorfik* dengan  $G_1$  atau  $|k(G) - k(G^\sigma)| = 1$ .

### Akibat

Jika  $G_1, G_2 \in R(2^n)$  dan  $G_1$  *adjacent* dengan  $G_2$  maka  $|k(G) - k(G^\sigma)| = 1$ .

### Bukti

$G_1$  *adjacent* dengan  $G_2$  pada graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  sehingga berdasarkan Definisi 2.1 terdapat suatu *switching*  $\sigma$  sedemikian sehingga  $G_2 = G_1^\sigma$ . Karena  $R(2^n)$  adalah himpunan semua *non-isomorfik 2-regular* graf dengan *order*  $n$ , sehingga  $G_1$  tidak *isomorfik* dengan  $G_2$ . Dengan Teorema 3 diperoleh  $|k(G) - k(G^\sigma)| = 1$ .

Sebuah graf  $G$  adalah graf bipartite jika  $V(G)$  dapat dipartisi menjadi dua subset yaitu  $V_1$  dan  $V_2$  sedemikian sehingga masing-masing garis dari  $G$  menghubungkan titik  $V_1$  dan titik  $V_2$ . Teorema 3.2 menunjukkan bahwa graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  adalah bipartite.

### Teorema 4

Graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  adalah bipartite untuk  $n \geq 6$ .

### Bukti

$$V_1 = \{G \in \mathfrak{R}(2^n) \mid k(G) \text{ adalah ganjil}\}$$

$$\text{dan } V_2 = \{G \in \mathfrak{R}(2^n) \mid k(G) \text{ adalah genap}\}.$$

Jika  $G_1, G_2 \in V_1$  maka  $k(G_1)$  dan  $k(G_2)$  adalah ganjil. Ini berarti

$$|k(G_1) - k(G_2)| \neq 1.$$

Dengan akibat 3.1,  $G_1$  tidak *adjacent* dengan  $G_2$ . Dengan cara yang sama jika

$G_1, G_2 \in V_2$ , maka  $G_1$  tidak *adjacent* dengan  $G_2$ . Jadi tidak ada dua titik di  $V_1$  dan  $V_2$  yang *adjacent*. Dengan teorema 2.2 graf  $\mathfrak{R}(d)$  adalah terhubung (*connected*) sehingga graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  yang merupakan kejadian khusus dari graf  $\mathfrak{R}(d)$  juga terhubung, oleh karena itu masing-masing garis di  $\mathfrak{R}(2^n)$  menghubungkan titik  $V_1$  dan  $V_2$ . Oleh karena itu graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  adalah bipartit.

### Contoh 2.

Pada Contoh 1 himpunan titik dari graf  $\mathfrak{R}(2^{13})$  dapat dibagi menjadi 2 bagian yaitu  $V_1$  dan  $V_2$  sebagai berikut:

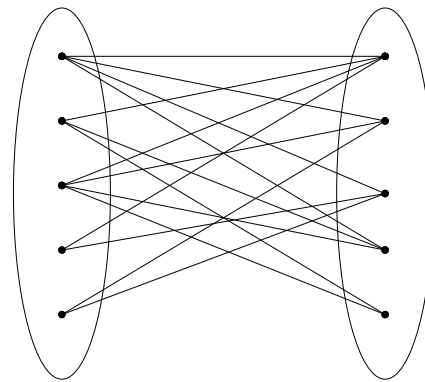
$$V_1 = \{G \in R(2^{13}) \mid k(G) \text{ adalah ganjil}\}$$

$$V_1 = \{v_1, v_6, v_7, v_8, v_9\}$$

$$\text{dan } V_2 = \{G \in R(2^{13}) \mid k(G) \text{ adalah genap}\}$$

$$V_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_{10}\}$$

Gambar graf  $\mathfrak{R}(2^{13})$  disajikan dalam bentuk berikut:



Gambar 3.2 Graf  $\mathfrak{R}(2^{13})$  Bipartite

## 4. PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan sebelumnya adalah:

1.  $R(2^n)$  adalah himpunan semua realisasi *non isomorfik 2-regular* graf dari *order*  $n$ . Sedangkan Graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  adalah graf yang himpunan titiknya adalah  $R(2^n)$ , dengan  $n \geq 3$ .
2. Jika graf  $G$  dan  $H$  pada  $\mathfrak{R}(2^n)$  maka terdapat garis  $GH$  pada graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  jika dan hanya jika  $G$  dan  $H$  tidak isomorfis

dan terdapat suatu switching  $\sigma$  sedemikian sehingga  $G^\sigma$  sama dengan  $H$ .

3. Graf  $\mathfrak{R}(d)$  adalah terhubung, sehingga graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  yang merupakan kejadian khusus dari graf  $\mathfrak{R}(d)$  juga terhubung.
4. Graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  untuk  $n \geq 6$  adalah bipartit.

#### 4.2 Saran

Dalam artikel ini baru ditunjukkan sifat terhubung dan bipartit dari graf  $\mathfrak{R}(2^n)$  untuk  $n \geq 6$ . Struktur dan sifat-sifat yang lain dari graf ini masih dapat dikembangkan.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chartrand, G dan Lesniak, L. (1996), *Graphs and Digraphs*, Chapman & Hall, New York.

- [2] Harju, Tero (2007), *Lecture Notes on Graph Theory*, Department of mathematics University Of Turku, Finland.
- [3] Iamjaroen, Chawalit (2007), *Some Properties of Graph  $\mathfrak{R}(2^N)$* , International Journal of Computer Science And Network Security, Vol. 7, No. 5 : 90 – 94.
- [4] Punnim, Narong (2005), *Switching, Realization and Interpolation Theorems for Graph Parameters*, International Journal of Mathematics and Mathematical Science, Vol. 13 : 2095 – 2117.
- [5] Punnim, Narong (2008), *Some Structures Of The Graphs  $\mathfrak{R}(2^N)$* , Department Of Mathematics Srinakharinwirot University, Bangkok.