

SISTEM PENGENDALIAN PERSEDIAAN MODEL PROBABILISTIK DENGAN “BACK ORDER POLICY”

Yutik Ernawati¹ dan Sunarsih²

^{1,2}Jurusan Matematika, FMIPA UNDIP

Jl. Prof. H. Soedarto, SH., Tembalang, Semarang 50275

ABSTRACT. Inventory represents the amount of reserved raw material to meet demand of consumers in certain period. If the demand is uncertain, the stock could be insufficient or becoming excessive. Therefore, it is required to device an optimal inventory rule which concerning all possible factors. In this paper, a probability inventory model with constraint will be applied on a case of back order policy. The constraints considered are budget constraint and storage capacity constraint. Lagrange Multipliers method with Kuhn-Tucker condition will be used to solve the model. Using this model, the company can determine the order quantity (Q), reorder point (r) and safety stock (S_s) at the optimal point by accomodating purchasing budget and storage capacities of existing raw material. The result of comparison study between this model with the inventory policy by company shows that this model is able to gives an optimal solution. So applying the model, the company is able to save inventory cost 2,42 % every year with consideration storage area capacities.

Keywords : Inventory Control, Probabilistic Model, Back Orders Policy.

1. PENDAHULUAN

Setiap perusahaan, seperti perusahaan perdagangan, industri atau jasa selalu mengadakan persediaan. Kebutuhan akan sistem pengendalian persediaan pada dasarnya muncul karena adanya permasalahan yang mungkin dihadapi oleh perusahaan berupa terjadinya kelebihan atau kekurangan persediaan [8]. Jika perusahaan mengalami kelebihan persediaan maka dapat merugikan, karena menyebabkan terhentinya perputaran uang atau modal dan munculnya biaya-biaya tambahan yang tidak diperlukan. Jika perusahaan kekurangan persediaan, maka perusahaan tidak dapat memenuhi permintaan dalam jumlah besar, sehingga untuk dapat memenuhi permintaan konsumen, perusahaan harus memesan barang lebih sering, yang berarti akan meningkatkan biaya pemesanan.

Terkait dengan uraian diatas, pada umumnya setiap perusahaan selalu mempunyai persediaan bahan baku dalam keadaan dan jumlah yang berbeda-beda untuk mendukung kelancaran proses produksinya [1] dan [10]. Hal-hal yang

mempengaruhi dalam mengadakan persediaan yaitu ketersediaan modal atau anggaran pembelian, pola permintaan dari konsumen, serta kebijakan dari perusahaan. Sekarang ini masih banyak perusahaan melakukan persediaan tanpa memperhitungkan perencanaan sehingga dapat mempengaruhi biaya operasional. Penentuan jumlah persediaan dan persediaan cadangan (*safety stock*) untuk mengantisipasi timbulnya lonjakan jumlah permintaan dan jumlah cacat produksi hanya ditentukan dengan perkiraan. Hal tersebut akan berpengaruh terhadap total biaya yang dikeluarkan untuk mengadakan persediaan.

Dalam tulisan ini, dibahas tentang model persediaan probabilistik untuk kasus *back order* tanpa kendala dan dengan kendala. Model ini dapat membantu untuk menentukan jumlah bahan baku dan *safety stock* yang harus disiapkan setiap dilakukan pemesanan kepada *supplier* secara lebih optimal dengan meminimalkan total biaya pembelian.

2. MODEL PERSEDIAAN

Inventori probabilistik jumlah permintaan barang tiap-tiap periodenya tidak diketahui secara pasti [7] dan [11]. Informasi tentang permintaan dapat diketahui dari pola permintaan yang diperoleh berdasarkan data masa lalu. Persediaan model (Q,r) ditandai dengan dua hal yang mendasar yaitu:

1. Besarnya pemesanan selalu tetap untuk setiap kali pemesanan dilakukan.
2. Saat pemesanan dilakukan apabila jumlah persediaan yang dimiliki telah mencapai titik pemesanan kembali (*reorder point*).

2.1 Model Persediaan Probabilistik Tanpa Kendala (Model (Q,r) Dengan “Back Order Policy”

Dalam mencari nilai pemesanan (Q) optimal dan *reorder point* (r) , fungsi tujuan dari model (Q,r) adalah meminimumkan biaya total persediaan (Tc) . Jika permintaan bersifat probabilistik, maka komponennya berupa nilai ekspektasi. Ekspektasi biaya total persediaan yang dimaksud disini terdiri dari empat elemen yaitu ekspektasi biaya pembelian $(E\{Cp\})$, ekspektasi biaya pemesanan $(E\{Co\})$, ekspektasi biaya penyimpanan $(E\{Ch\})$, dan ekspektasi biaya kekurangan persediaan atau *stockout* $(E\{Cs\})$, sehingga untuk kasus *multi item* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E\{Tc\} = \sum_i^n (E\{Cp_i\} + E\{Co_i\} + E\{Ch_i\} + E\{Cs_i\}) \quad (1)$$

$$E\{Tc\} = \sum_i^n \left(D_i \cdot p_i + \frac{B_i \cdot D_i}{Q_i} + h_i \left[\frac{1}{2} Q_i + r_i - \mu_L \right] + \left[\frac{So_i \cdot D_i}{Q_i} \right] M_i \right) \quad (2)$$

dimana:

- i : item ke- i , $i = 1, 2, \dots, n$
- p : Biaya pembelian tiap bahan baku per unit
- h : Biaya penyimpanan bahan baku per tahun

- B : Biaya setiap kali melakukan pemesanan
- So : Biaya kekurangan persediaan
- D : Jumlah permintaan selama satu tahun
- μ_L : Rata-rata permintaan selama *lead time*
- σ_L : Standar deviasi permintaan selama *lead time*
- M : Probabilitas *stockout*

Jika persamaan (2.2) diturunkan terhadap Q kemudian disama dengankan nol dimana $f(x)$ merupakan distribusi permintaan yang diasumsikan berdistribusi normal maka:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D_i (B_i + So_i \cdot M_i)}{h_i}} \quad (3)$$

Jika persamaan (2) diturunkan terhadap r kemudian disama dengankan nol maka

$$\alpha_i = \frac{h_i \cdot Q_i}{So_i \cdot D_i}; \quad \alpha_i \text{ merupakan nilai } critical$$

ratio yang dapat dilihat pada tabel distribusi kumulatif normal standar.

$$r_i = Z_\alpha \cdot \sigma_{L_i} + \mu_{L_i}; \quad SS_i = Z_\alpha \cdot \sigma_{L_i};$$

$$M_i = \sigma_{L_i} f(Z_\alpha) + (\mu_{L_i} - r_i) G(Z_\alpha)$$

$$T_i = \frac{Q_i^*}{D_i}; \quad f_i = \frac{D_i}{Q_i^*} \text{ dengan nilai } Z_\alpha \text{ dapat}$$

dilihat pada tabel distribusi normal standar.

Menurut [5] nilai Q^* dan r^* dihitung secara simultan dengan melalui beberapa iterasi dengan prosedur penghitungan sebagai berikut :

- 1.) Mula-mula dihitung Q_1 dengan rumus

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot B}{h}}$$

- 2.) Hitung nilai dari r_1 dengan memasukkan Q_1 pada persamaan :

$$\alpha = \frac{h \cdot Q}{So \cdot D}; \quad r = Z_\alpha \cdot \sigma_L + \mu$$

- 3.) Hitung nilai $M(r_i)$, masukkan nilai r_1 ke persamaan

$$M(r_i) = \sigma_L f\left(\frac{r - \mu}{\sigma_L}\right) + \sigma_L \left(\frac{\mu - r}{\sigma_L}\right) G\left(\frac{r - \mu}{\sigma_L}\right)$$

Gunakan $M(r_i)$ ini untuk mendapatkan Q_2 dalam persamaan :

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2D_i(B_i + S_{o_i} \cdot M_i)}{h_i}}$$

- 4.) Hitung nilai r_2 seperti pada langkah ke dua.
- 5.) Lanjutkan cara ini sampai nilai Q_i dan r_i menuju satu harga tertentu yang tidak berubah, artinya menuju kekonvergen. Sehingga didapat Q^* dan r^* optimal.

2.2 Model Persediaan Probabilistik Berkendala (Model (Q,r,λ)) dengan “Back Order Policy”

Model persediaan probabilistik dengan kendala secara garis besar terdiri dari dua fungsi yaitu fungsi tujuan dan fungsi kendala. Dalam kasus ini fungsi tujuannya adalah meminimalkan total biaya persediaan sedangkan fungsi anggaran pembelian yang terbatas dan kapasitas penyimpanan yang terbatas [3] dan [9], model penyelesaian permasalahan ini akan diuraikan sebagai berikut :

Fungsi tujuan :

$$E\{Tc_{ij}\} = \sum_i^n D_i \cdot p_i + \frac{B_i \cdot D_i}{Q_i} + h_i \left(\frac{1}{2} Q_i + r_i - \mu \right) + \left(\frac{S_{o_i} \cdot D_i}{Q_i} \right) \cdot M_i \quad (4)$$

Fungsi pembatas:

$$1. f = \sum_{i=1}^n k_i Q_i \leq K \quad (5)$$

di mana:

k_i : Kebutuhan area penyimpanan untuk setiap unit bahan baku item i

K : Kapasitas area penyimpanan yang tersedia

Q_i : Jumlah pemesanan item i

$$2. g = \sum_{i=1}^n p_i Q_i \leq A \quad (6)$$

di mana

p_i : Biaya pembelian untuk setiap unit bahan baku item i

A : Anggaran pembelian yang tersedia

Q_i : Jumlah pemesanan item i

Misalkan Pengali Lagrange adalah λ maka tiga persamaan diatas jika diselesaikan dengan metode Pengali Lagrange akan menjadi [2] :

$$L(Q_i, r_i, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_i^n \left[D_i \cdot p_i + \frac{B_i \cdot D_i}{Q_i} + h_i \left(\frac{1}{2} Q_i + r_i - \mu \right) + \left(\frac{S_{o_i} \cdot D_i}{Q_i} \right) M_i \right] + \lambda_1 \left[\left(\sum_{i=1}^n k_i Q_i \right) - K \right] + \lambda_2 \left[\left(\sum_{i=1}^n p_i Q_i \right) - A \right] \quad (7)$$

[2] dan [6] Dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker sehingga:

$$a. \lambda \geq 0$$

(8)

$$b. \frac{\partial L(Q_i, r_i, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial Q_i} = 0 \quad \text{sehingga}$$

didapatkan

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2D_i(B_i + S_{o_i} M_i)}{h_i + 2\lambda_1 k_i + 2\lambda_2 p_i}} \quad (9)$$

$$c. \frac{\partial L(Q_i, r_i, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial r_i} = 0 \quad \text{didapatkan}$$

$$\int_{r_i}^{\infty} f(x) dx = \frac{h_i Q_i}{S_{o_i} D_i} \quad \text{atau } \alpha = \frac{h_i Q_i}{S_{o_i} D_i} \quad (10)$$

$$d. \frac{\partial L(Q_i, r_i, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \text{didapatkan}$$

$$\sum_{i=1}^n k_i Q_i = K \quad (11)$$

$$e. \frac{\partial L(Q_i, r_i, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 0 \quad \text{didapatkan}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i Q_i = A \quad (12)$$

$$f. \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n k_i Q_i - K \right) = 0 \quad (13)$$

$$g. \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n p_i Q_i - A \right) = 0 \quad (14)$$

3. SIMULASI MODEL PERSEDIAAN

Untuk simulasi dilakukan studi pada CV. Surya Tarra Mandiri di mana perusahaan ini bergerak dibidang *general manufacture*. Adapun problem yang dihadapi oleh perusahaan adalah meminimalkan biaya persediaan tahunan dengan kendala kapasitas area sebesar 20 m² dan anggaran pembelian sebesar Rp.125 juta. Data-data yang diperoleh dari perusahaan secara ringkas dapat dilihat pada Tabel 3.1. Untuk menyelesaikan problem ini, pertama-tama dilakukan pengujian data permintaan di mana hasil pengujian ini dapat dilihat pada Tabel 3.2 [4]. Dari data ini kemudian disimulasikan dengan model persediaan tanpa kendala. Hasil Q dan r yang telah didapat merupakan solusi sementara yang selanjutnya akan diperiksa apakah hasil penghitungan memenuhi kendala atau tidak. Jika Q dan r memenuhi kendala maka pemasalahan selesai, hasil yang sementara tadi menjadi solusi yang optimal. Sebaliknya apabila solusi sementara Q dan r yang didapat tidak memenuhi kendala maka hasil penghitungan tersebut tidak terpakai.

3.1 Hasil penghitungan model persediaan probabilistik tanpa kendala (Model (Q,r))

Dari seluruh penghitungan dengan model (Q,r) tanpa kendala untuk semua bahan baku maka diperoleh jumlah kuantitas pemesanan optimal (Q) serta penghitungan total biaya pembelian dan kapasitas area yang dapat dilihat pada Tabel 3.3 sebagaimana terlampir.

Dari penghitungan diperoleh total biaya pembelian untuk seluruh bahan baku sebesar Rp.165.163.750,00 dan kebutuhan area penyimpanan sebesar 264.175 cm² dimana nilai tersebut lebih besar dari anggaran pembelian dan kapasitas area yang tersedia. Hal ini berarti solusi yang diperoleh tidak terpakai, sehingga untuk menyelesaikan permasalahan digunakan

model persediaan berkendala untuk mendapatkan solusi yang optimal.

3.2 Hasil penghitungan model persediaan probabilistik dengan kendala (Model (Q,r,λ))

Proses penghitungan model persediaan berkendala identik dengan penghitungan model persediaan tanpa kendala. Untuk proses penghitungannya yaitu pertama-tama mencari nilai λ dengan *trial and error*, karena terdapat dua kendala maka nilai λ yang dicari ada dua yaitu λ_1 dan λ_2 . Dengan menggunakan *trial and error* maka didapatkan nilai λ yang memenuhi yaitu $\lambda_1 = 0,20$ dan $\lambda_2 = 0,0425$. Hasil penghitungan selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 3.4 sebagaimana terlampir.

Dari hasil penghitungan dengan model persediaan berkendala didapatkan total biaya pembelian sebesar Rp.124.957.500,00 dan total kebutuhan area penyimpanan sebesar 196.925 cm² di mana nilai tersebut lebih kecil dari kendala yang ada, sehingga hasil penghitungan yang didapat merupakan solusi yang optimal. Jika dibandingkan dengan perencanaan persediaan perusahaan maka model ini menghasilkan total biaya persediaan tahunan lebih kecil. Total biaya persediaan per tahun dengan model (Q,r,λ) sebesar Rp. 1.733.448.558,00 sedangkan total biaya persediaan perusahaan sebesar Rp. 1.691.503.005,00 sehingga didapat total penghematan biaya sebesar Rp. 41.945.553,00 atau 2,42% per tahun. Dengan demikian perusahaan dapat menggunakan model persediaan probabilistik berkendala dengan "*back orders policy*" untuk mendapatkan hasil yang lebih baik dan optimal.

4. KESIMPULAN

Pengendalian persediaan dengan menggunakan model persediaan probabilistik berkendala (Q,r,λ) dengan "*back orders policy*" pada perusahaan ternyata menunjukkan hasil yang lebih

baik dibandingkan dengan perencanaan yang digunakan perusahaan selama ini. Hal ini dapat dilihat dari hasil penghitungan didapatkan kuantitas pemesanan (Q), *reorder point* (r), dan *safety stock* (S_s) yang optimal. Selain itu juga adanya penghematan pada beberapa jenis bahan baku yang dipesan. Total penghematan yang diperoleh dengan menggunakan metode ini adalah sebesar 2,42% per tahun, sehingga metode optimasi ini dapat digunakan sebagai bahan pertimbangan bagi manajemen perusahaan dalam mengadakan persediaan.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Assauri, S. (1993), *Manajemen Produksi dan Operasi*, Edisi keempat, Jakarta, LPFE-UI.
 - [2] Mital, K.V. (1983), *Optimization Methods In Operation Research and System Analysis*, Second Edition, New Delhi, Wiley Eastern Limited.
 - [3] Mulyono, Sri. (2002), *Operations Research*, Jakarta. LPFE-UI
 - [4] Mustafid, (2003), *Buku Ajar Statistika Elementer Metode dan Aplikasi Dengan SPSS*, Jurusan Matematika FMIPA UNDIP, Semarang.
 - [5] Philips, Don T., A. Ravindran & James Solberg (1994), *Operations Research Principles and Practic*, New York, John Willey & Sons.
 - [6] Purcel, dkk, (1987), *Kalkulus dan Geometri Analitis* (Terjemahan : I Nyoman Susila, dkk), Jakarta, Erlangga.
 - [7] Rahmadeni, S. (2007), *Optimasi Perencanaan Sistem Persediaan Bahan Baku Berdasarkan Kendala Kapasitas Area Penyimpanan*, Tugas Akhir Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro.
 - [8] Sutarman (2003), *Perencanaan Persediaan Bahan Baku dengan Model Backorder*, FTI Universitas Pasundan Bandung.
 - [9] Taha, Hamdy A. (1996), *Riset Operasi Suatu : Pengantar*, Jakarta, Bina Rupa Aksara.
 - [10] Tersine, Richard J. (1994), *Principles Of Inventory and Materials Management*, Fourth Edition, New Jersey, Prentice-Hall International, Inc.
 - [11] Waters, C D J. (1992), *Inventory Control and Management*, Chicester, John Wiley & Sons. Ltd.
-

Lampiran

Tabel 3.1 Data Jenis Bahan Baku Perusahaan

No	Jenis Bahan Baku	Harga Barang p	B simpan h	B.Stockout So	Demand D	μ_L	σ_L	Kebutuhan Area (cm ²)
1	Squre(Pipa persegi)	250000	37475	31250	1487	4.13	23.30	2400
2	Assental(Besi As)	15000	2248.5	1875	11920	33.11	139.53	720
3	Plate	400000	59960	50000	298	1.66	4.93	28800
4	Hose(Selang)	200000	29980	25000	596	3.31	9.87	2500
5	Infraboard	60000	8994	7500	5964	33.13	98.67	18750
6	Caster(Roda)	450000	67455	56250	298	5.79	9.23	1170
7	Cat tiner	30000	4497	3750	894	2.48	10.46	225
8	Channel UNP	450000	67455	56250	66	0.37	0.77	4800
9	Angle Bars(Besi Siku)	175000	26232.5	21875	66	0.37	0.77	1200
10	Adjuster	75000	11242.5	9375	99	0.28	0.81	15
11	Carbon steel pipe	175000	26232.5	21875	132	0.37	1.08	1800
12	Bearing	20000	2998	2500	1056	20.53	22.95	5600
13	Dinamo motor	3500000	524650	437500	33	0.64	0.72	400
14	Gear & Rantai	250000	37475	31250	33	0.18	0.38	400
15	PVC Belt	3800000	569620	475000	33	0.18	0.38	1225
16	Besi SKD	11250	1686.375	1406.25	651	12.66	8.98	300

Tabel 3.2 Hasil pengujian data dengan $\alpha : 5\%$

No	Bahan Baku	Assimp.Sig (Pvalue)	Mean	Standar Deviasi	Kesimpulan
1	Squre(Pipa persegi)	0.099	123.90	127.635	Data berdistribusi normal
2	Assental(Besi As)	0.115	993.33	764.262	Data berdistribusi normal
3	Plate	0.115	24.83	19.106	Data berdistribusi normal
4	Hose(Selang)	0.115	49.67	38.213	Data berdistribusi normal
5	Infraboard	0.115	496.97	382.131	Data berdistribusi normal
6	Caster(Roda)	0.115	24.83	19.106	Data berdistribusi normal
7	Cat	0.115	74.50	57.319	Data berdistribusi normal
8	Channel UNP	0.761	5.50	2.969	Data berdistribusi normal
9	Angle Bars(Besi Siku)	0.761	5.50	2.969	Data berdistribusi normal
10	Adjuster	0.761	8.25	4.453	Data berdistribusi normal
11	Carbon steel pipe	0.761	11.00	5.939	Data berdistribusi normal
12	Bearing	0.761	88.00	47.512	Data berdistribusi normal
13	Dinamo motor	0.761	2.75	1.484	Data berdistribusi normal
14	Gear & Rantai	0.761	2.75	1.484	Data berdistribusi normal
15	PVC Belt	0.761	2.75	1.484	Data berdistribusi normal
16	Besi SKD	0.448	54.25	18.592	Data berdistribusi normal

Tabel 3.3 Penghitungan Total Biaya Pembelian dan Kapasitas Area

Nama bahan baku	Q	Biaya Pembelian (p_i)	Kebutuhan biaya ($p_i Q_i$)	Kebutuhan area ($k_i Q_i$)
		Rp	Rp	cm ²
Square(Pipa persegi)	96	250,000.00	24,000,000.00	7200
Assental(Besi As)	1046	15,000.00	15,690,000.00	21600
Plate	32	400,000.00	12,800,000.00	28800
Hose(Selang)	65	200,000.00	13,000,000.00	7500
Infraboard	393	60,000.00	23,580,000.00	150000
Caster(Roda)	33	450,000.00	14,850,000.00	1170
Cat	196	30,000.00	5,880,000.00	14700
Channel UNP	14	450,000.00	6,300,000.00	9600
Angle Bars(Besi Siku)	22	175,000.00	3,850,000.00	7200
Adjuster	40	75,000.00	3,000,000.00	180
Carbon steel pipe	31	175,000.00	5,425,000.00	7200
Bearing	267	20,000.00	5,340,000.00	5600
Dinamo motor	4	3,500,000.00	14,000,000.00	800
Gear & Rantai	12	250,000.00	3,000,000.00	800
PVC Belt	3	3,800,000.00	11,400,000.00	1225
Besi SKD	271	11,250.00	3,048,750.00	600
Jumlah			165,163,750.00	264175

Tabel 3.4 Hasil penghitungan model (Q, r, λ)

Bahan Baku	Q	r	Ss	f (kali)	T (tahun)	Q berdasar satuan min pemesanan	Kebutuhan biaya ($p_i Q_i$) Rp	KebArea ($k_i Q_i$) cm ²	Total biaya persediaan Rp
Square	74	40	37	20	0.04976	74 batang	18,500,000.00	7200	376,919,061
Assental	788	230	197	15	0.06611	788 batang	11,820,000.00	14400	181,780,143
Plate	24	8	5	12	0.08054	24 lembar	9,600,000.00	28800	121,736,349
Hose(Selang)	50	16	13	12	0.08388	50 roll	10,000,000.00	7500	121,753,426
Infraboard	241	197	164	25	0.04041	241 lembar	14,460,000.00	93750	363,570,242
Caster(Roda)	25	17	12	12	0.08389	8 box	11,250,000.00	1170	137,837,097
Cat	154	11	8	4	0.17230	154 kaleng	4,620,000.00	11700	27,775,493
Channel UNP	11	1	1	7	0.16670	11 batang	4,950,000.00	9600	30,731,226
Angle Bars	17	1	0.38	4	0.25760	17 batang	2,975,000.00	7200	12,163,117
Adjuster	32	1	0.23	3	0.32320	32 set	2,400,000.00	180	7,898,411
Carbonsteel pipe	24	1	1	5	0.18180	24 batang	4,200,000.00	7200	23,962,494
Bearing	171	40	20	7	0.16190	17 box	3,420,000.00	5600	22,144,474
Dinamo motor	3	2	1	11	0.09091	3 unit	10,500,000.00	400	118,836,350
Gear & Rantai	10	0.33	0.14	3	0.30300	10 set	2,500,000.00	400	8,729,881
PVC Belt	3	1	0.49	11	0.09091	3 unit	11,400,000.00	1225	127,830,062
Besi SKD	210	15	3	4	0.32260	26 kg	2,362,500.00	600	7,835,180
Jumlah							124,957,500.00	196925	1,691,503,005