Jurnal Matematika Vol. 11, No.1, April 2008: 43-51, ISSN: 1410-8518

MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK DENGAN WAKTU TUNDA

Henny M. Timuneno[1], R. Heri Soelistyo Utomo[2], dan Widowati[3]
[1, 2, 3] Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, SH Tembalang Semarang 50275

Abstract. The logistic growth model with time delay has developed from the classical logistic model, where as in the growth logistic model with time delay, the growth process delay from a population is calculated. This delay cause population decrease then increase so oscillation appears in population growth. So, the solution is not a monotonous function. The result of analysis indicate that the logistic growth model with time delay have two equilibrium points. Each equilibrium points is analyzed for their stability based on time delay variation on the population growth. The longer time delay in the population growth can cause the unstable growth, hence the population decrease and become extinct.

Keywords: logistic model, time-delay, oscillation, equilibrium.

1. PENDAHULUAN

Setiap makhluk hidup selalu meng-alami perubahan dari waktu ke waktu, dimulai dari adanya kelahiran, perkembangan, hingga kematian. Untuk menggambarkan pertumbuhan suatu populasi, pada tahun 1838 Verhulst memperkenalkan suatu model pertumbuhan yang sering disebut model pertumbuhan logistik [4,5,7,8]. Pada model pertumbuhan logistik ini diasumsikan bahwa tidak ada penundaan waktu pada proses pertumbuhan populasi [7]. Selain itu pada model ini dihasilkan solusi yang berbentuk fungsi monoton (naik atau turun), dimana fungsi seperti ini memberikan penafsiran bahwa jumlah populasi akan terus bertambah (tidak pernah berkurang) atau akan terus berkurang (tidak pernah bertambah).

Dalam kenyataannya, sepanjang waktu pertumbuhan keadaan lingkungan atau daya dukung lingkungan dapat berubah. Beberapa proses biologi yang melibatkan stadium pertumbuhan, keadan lingkungan yang berubah mengakibatkan pertumbuhan akan megalami penundaan. Waktu tunda ini menyebabkan penurunan populasi tetapi kemudian terjadi peningkatan sehingga terjadi osilasi pada pertumbuhan populasi [7]. Sehingga solusi yang diperoleh bukan merupakan suatu fungsi yang monoton.

Bertolak dari pemikiran tersebut, maka pembahasan dititikberatkan pada pengkajian pengaruh penundaan waktu dalam pertumbuhan populasi dan analisa kestabilan dari model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Model Pertumbuhan Logistik Sederhana

Salah satu model pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan logistik (*logistic growth models*). Dengan menggunakan kaidah logistik (*logistic law*) bahwa persediaan logistik ada batasnya, model ini mengasumsikan bahwa pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama, sehingga grafiknya akan mendekati konstan (*zero growth*). Misalkan $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t, dan R_0 menyatakan laju pertumbuhan populasi maka secara umum laju pertumbuhan yang bergantung pada suatu populasi, sebagai berikut [7]:

$$\frac{dN}{dt} = R_0 N \qquad (1)$$

Model pertumbuhan logistik dapat diturunkan dengan menggunakan asumsi

a. Laju pertumbuhan populasi $\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}$ pada saat $N(t)=0$ adalah r (dengan r konstan).
b. Laju pertumbuhan ini menurun secara linear dan bernilai 0 saat $N(t)=K$.

r adalah laju pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth rate*), yaitu nilai yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi, K = *carrying capacity*, yaitu ukuran maksimum dari suatu populasi. Dalam hal ini diasumsikan $r>0$, yaitu mengingat setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak, sehingga dari asumsi diatas dapat diturunkan suatu model pertumbuhan populasi yang dikenal dengan persamaan logistik.

$$\frac{dN(t)}{dt}=rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right) \qquad (2)$$

Jika diberikan syarat awal $N(0)=N_0$, maka diperoleh solusi khusus dari persamaan logistik ini, yaitu

$$N(t)=\frac{K}{\left(\frac{K}{N_0}-1\right)e^{-rt}+1} \qquad (3)$$

dengan

$N(t)$	:	Jumlah populasi pada waktu (t)
r	:	Laju pertumbuhan intrinsik
K	:	Kapasitas pembawaan *(carrying capacity)*

2.2 Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda

Persamaan logistik sederhana tidak tepat diterapkan untuk mendeskripsikan pertumbuhan populasi pada kasus dimana ada keterlambatan (waktu tunda) dalam stadium pertumbuhan. Oleh karena itu dikembangkan suatu model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda.

Jika melihat pada model pertumbuhan logistik sederhana sebelumnya (2), maka mekanisme penundaan waktu untuk pertumbuhan populasi dapat dimodelkan dalam persamaan

$$\frac{dN(t)}{dt}=rN(t)\left[1-\frac{N(t-\tau)}{K}\right] \quad , \qquad (4)$$

dengan

$N(t)$	:	Jumlah populasi pada waktu t
r	:	Laju pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth rate*)
$N(t-\tau)$	:	Jumlah populasi pada saat penundaan
K	:	*Carrying capacity*
τ	:	waktu tunda

Secara analitik model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda sangat sulit untuk diselesaikan, sehingga sulit juga untuk memperoleh solusi eksak dari model tersebut. Oleh karena itu untuk menyelesaikan model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda akan digunakan formulasi waktu diskrit untuk memperoleh solusi numerik.

Secara umum model dari pertumbuhan populasi diskrit tanpa penunda-an waktu ditulis sebagai berikut

$$N(t+\Delta t)-N(t)=R(t)\Delta tN(t) \quad , \qquad (5)$$

dengan Δt adalah waktu diskritisasi atau disebut juga selang waktu. Selanjutnya model pertumbuhan diskrit dengan R konstan ditulis sebagai berikut

$$N(t+\Delta t)-N(t)=R_0\Delta tN(t) \quad , \qquad (6)$$

dimana laju pertumbuhan proporsional dengan populasi. Jika pada kasus tertentu seperti bahan makanan yang dibatasi maka laju pertumbuhan akan menurun. Situasi ini dimodelkan dengan persamaan logistik diskrit sebagai berikut

$$N(t+\Delta t)-N(t)=\Delta tN(t)\left[r-\frac{r}{K}N(t)\right] \quad .(7)$$

Persamaan ini secara otomatis digunakan dalam perhitungan suatu penundaan Δt. Perubahan dalam populasi bergantung pada populasi Δt waktu yang lalu.

Jika digunakan formulasi diskrit dari pertumbuhan populasi, dan pada penambahan pertumbuhan terjadi penundaan waktu sebesar

τ , maka model pertumbuhan diskrit dengan R_0 konstan adalah

$$N(t+\Delta t)-N(t)=R_0\Delta tN(t-\tau) \qquad (8)$$

sedangkan model pertumbuhan logistik diskrit dengan waktu tunda τ diberikan seperti di bawah ini

$$N(t+\Delta t)-N(t)=\Delta tN(t)\left[r-\frac{r}{K}N(t-\tau)\right] \quad , \qquad (9)$$

dengan pengukuran dilakukan pada setiap selang waktu Δt.

Untuk menganalisa lebih jauh persamaan (9), diasumsikan suatu populasi *N(t)* bertambah secara teratur setiap tahun ($\Delta t = 1$). Penambahan individu pada area yang diberikan bergantung pada sumber makanan, dimana perubahan bergantung pada berapa banyak sumber makanan yang dikonsumsi oleh individu tersebut selama tahun sebelumnya. Pada bagian ini, diasumsikan juga penundaan waktu dalam mekanisme pertumbuhan juga satu tahun ($\tau = \Delta t = 1$). Penyederhanaan model untuk proses ini adalah persamaan logistik diskrit dengan waktu tunda sebagai berikut

$$N(t+\Delta t)-N(t)=\Delta tN(t)\left[r-\frac{r}{K}N(t-\Delta t)\right] \quad . \qquad (10)$$

Dari persamaan (10) bila diberikan syarat awal $t_0=0$, $N(0)=N_0$ dan $N_1=N(\Delta t)$ maka solusi dari persamaan (10) dapat langsung diselesaikan dengan perhitungan numerik sebagai berikut:

$$N(t+\Delta t)=\Delta tN(t)\left[r-\frac{r}{K}N(t-\Delta t)\right] \quad ,$$

$$N(t+\Delta t)=N(t)\left[1+(\Delta tr-\Delta t\frac{r}{K}N(t-\Delta t))\right] \quad ,$$

$$N_0=N(0)\ , N_1=N(\Delta t) \quad ,$$

$$N_2=N(\Delta t+\Delta t)=N_1\left[1+(\Delta tr-\Delta t\frac{r}{K}N(\Delta t-\Delta t))\right] \quad ,$$

$$N_3=N(2\Delta t+\Delta t)=N_2\left[1+(\Delta tr-\Delta t\frac{r}{K}N(2\Delta t-\Delta t))\right] \quad ,$$

$$\vdots$$

$$N_m=N(m\Delta t)=N_{m-1}\left[1+(\Delta tr-\Delta t\frac{r}{K}N(m\Delta t-\Delta t))\right] \quad .$$

Dengan syarat awal $t_0 = 0$, pada m unit dari Δt, $t\equiv m\Delta t$ maka dapat ditulis sebagai berikut

$$N(t)=N(m\Delta t)\equiv N_m \quad ,$$

serta dengan menggunakan notasi dari persamaan logistik diskrit dengan waktu tunda, persamaan (10) menjadi

$$N_{m+1}=N_m\left[1+(r\Delta t-\frac{r}{K}\Delta tN_{m-1})\right] \quad ,$$

$$N_{m+1}-N_m=N_m\left[r\Delta t-\frac{r}{K}\Delta tN_{m-1}\right] \quad ,$$

dengan

N_{m+1} : Jumlah populasi pada $m+1$ unit dari Δt

N_m : Jumlah populasi pada m unit dari Δt

N_{m-1} : Jumlah populasi pada $m-1$ unit dari Δt

Jika persamaan di atas disederhanakan maka dihasilkan persamaan

$$N_{m+1}-N_m=N_m\left(\alpha-\beta N_{m-1}\right) \quad , \qquad (11)$$

dengan $\alpha=r\Delta t$ dan $\beta=\frac{r}{K}\Delta t$

Kesetimbangan populasi N_E dicapai pada $N_E=N_m$, untuk semua *m* pada persamaan (11)

$$N_{m+1}-N_m=N_m\left(\alpha-\beta N_{m-1}\right) \quad ,$$

$$N_E-N_E=N_E(\alpha-\beta N_E) \quad ,$$

$$N_E(\alpha-\beta N_E)=0 \quad .$$

Sehingga diperoleh kesetimbangan populasinya adalah

$$N_E = 0 \quad \text{atau} \quad \alpha - \beta N_E = 0 \quad ,$$
$$\beta N_E = \alpha \quad ,$$
$$N_E = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{r\Delta t}{\frac{r}{K}\Delta t} = K \quad .$$

2.3 Analisa Kesetimbangan pada Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda

Model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda pada persaman (10) dapat ditulis sebagai berikut $N(t+\Delta t) - N(t) = N(t)\left[\alpha - \beta N(t-\tau)\right]$ (12)

dengan $\alpha = r\Delta t$ dan $\beta = \frac{r}{K}\Delta t$.

Model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda di atas mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu pada titik $N(t) = 0$ dan titik $N(t) = K$, untuk setiap *t*.

Untuk menganalisa masing-masing titik kesetimbangan, dilakukan proses linearisasi pada persamaan non-linear. Proses linearisasai dilakukan di persekitaran titik kesetimbangan dengan meng-gunakan prosedur perturbasi. Pada proses perturbasi ini, parameter perturbasi ε yang digunakan sangat kecil $(0 < \varepsilon \le 1)$ sehingga ini akan mengakibatkan sangat dekat dengan titik kesetimbangan *(equilibrium)*.

2.3.1 Perturbasi di sekitar titik kesetim-bangan $N(t) = 0$

Perturbasi di sekitar titik kesetim-bangan $N(t) = 0$ ditulis sebagai berikut

$$N(t) = 0 + \varepsilon N_1(t) \quad , \qquad (13)$$

$\varepsilon N_1(t)$ adalah perubahan dari titik kesetimbangan $N(t) = 0$. Selanjutnya persamaan (13) disubstitusikan kedalam persamaan (4) sehingga menghasilkan

$$\frac{\varepsilon dN_1(t)}{dt} = \varepsilon N_1(t)[r - \frac{r}{K}\varepsilon N_1(t-\tau)] \quad ,$$

equivalen

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = rN_1(t) - \frac{r}{K}N_1(t)\varepsilon N_1(t-\tau) \quad . \qquad (14)$$

Dengan mengabaikan bentuk nonlinear $-\frac{r}{K}N_1(t)\varepsilon N_1(t-\tau)$, maka diperoleh $\frac{dN_1(t)}{dt} = rN_1(t)$. Solusi dari persamaan tersebut adalah $N_1(t) = ce^{rt}$. Dari solusi yang dihasilkan, hal ini menunjukan bahwa populasi bertumbuh secara ekponensial dan tidak mengarah ke titik kesetimbangan $N(t) = 0$. Sehingga solusi kesetimbangan di titik $N(t) = 0$ merupakan kesetimbangan tidak stabil.

Selanjutnya akan dilakukan proses per-turbasi di titik kesetimbangan $N(t) = K$.

2.3.2 Perturbasi di sekitar titik kesetim-bangan $N(t) = K$

Perturbasi di sekitar titik kesetim-bangan $N(t) = K$ untuk model logistik diskrit ditulis sebagai berikut

$$N_m = K + \varepsilon y_m \quad ,$$
$$|\varepsilon y_m| \le K \qquad (15)$$

εy_m adalah perubahan dari titik kesetim-bangan $N(t) = K$. Selanjutnya persamaan (15) disubstitusikan ke dalam persamaan (11) sehingga menghasilkan

$$K + \varepsilon y_{m+1} - (K + \varepsilon y_m) = (K + \varepsilon y_m)(\alpha - \beta(K + \varepsilon y_{m-1}))$$
$$K + \varepsilon y_{m+1} - K - \varepsilon y_m = (K + \varepsilon y_m)(\alpha - \beta K - \varepsilon\beta y_{m-1})$$
$$\varepsilon y_{m+1} - \varepsilon y_m = (K + \varepsilon y_m)(r\Delta t - r\Delta t - \varepsilon\beta y_{m-1})$$
$$\varepsilon y_{m+1} - \varepsilon y_m = -\varepsilon\beta y_{m-1}(K + \varepsilon y_m)$$
$$\varepsilon y_{m+1} - \varepsilon y_m = (-\varepsilon\beta y_{m-1}K) - (\varepsilon\beta y_{m-1}\varepsilon y_m) .$$

Dengan mengabaikan bentuk nonlinear $-\beta y_{m-1}(\varepsilon y_m)$ maka diperoleh persamaan berikut

$$y_{m+1} - y_m = -\alpha y_{m-1} \quad . \qquad (16)$$

dengan $\alpha = \beta K$.

Persamaan (16) diatas merupakan persamaan differensi koefisien konstan linear. Untuk dapat menentukan perilaku di sekitar titik kesetimbangan, maka terlebih dahulu dilakukan analisa pada persamaan (16).

Diasumsikan solusi dari persamaan tersebut adalah $y_m = p^m$. Selanjutnya nilai p ditentukan dengan substitusi $y_m = p^m$ ke persamaan (16)

$$y_{m+1} - y_m + \alpha y_{m-1} = 0 \ ,$$

$$p^{m+1} - p^m + \alpha p^{m-1} = 0 \ ,$$

tiap suku dibagi dengan p^{m-1}, diperoleh persamaan kuadrat untuk p sebagai berikut

$$p^2 - p + \alpha = 0 \qquad (17)$$

akar-akar dari persamaan kuadrat di atas adalah

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2} \ ,$$

sehingga solusi umum dari persamaan (16) dapat ditulis

$$y_m = c_1 p_1{}^m + c_2 p_2{}^m \ .$$

Dari akar-akar p_1 dan p_2, akan diperoleh hasil sebagai berikut

a. Untuk $0 < \alpha < \frac{1}{4}$

p_1 dan p_2 merupakan akar-akar real positif, berbeda dan kurang dari 1, ($0 < p_1 < 1$ dan $0 < p_2 < 1$). Sehingga solusi dari persamaan (16) mendekati nol. Hal ini berarti titik kesetimbangan $N(t) = K$ stabil.

b. Untuk $\alpha = \frac{1}{4}$

$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ merupakan akar-akar real positif, sama dan kurang dari 1. Hal ini menunjukkan solusi dari persamaan (16) mendekati nol. Hal ini berarti $N(t) = K$ stabil.

c. Untuk $\alpha > \frac{1}{4}$

$$p_1 = \frac{1 + i\sqrt{4\alpha - 1}}{2} \quad \text{dan}$$

$$p_2 = \frac{1 - i\sqrt{4\alpha - 1}}{2}$$

salah satu akar merupakan konjugate kompleks dari yang lainnya, $|p_1| = |p_2|$ dan $\theta_1 = -\theta_2$, sehingga diperoleh solusi persamaan differensi sebagai berikut

$$y_m = |p_1|^m (c_1 e^{im\theta_1} + c_2 e^{-im\theta_1})$$

$$y_m = |p_1|^m [(c_1 \cos m\theta_1 + c_1 i \sin m\theta_1) + (c_2 \cos m\theta_1 - c_2 i \sin m\theta_1)]$$

$$y_m = |p_1|^m [(c_1 + c_2)\cos m\theta_1 + i(c_1 - c_2)\sin m\theta_1]$$

$$y_m = |p_1|^m (c_3 \cos m\theta_1 + c_4 \sin m\theta_1)$$

dengan

$$|p_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\alpha - 1}}{2}\right)^2} = \sqrt{\alpha}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\sqrt{4\alpha - 1}$$

Untuk interval $\frac{1}{4} < \alpha \le 1$, solusi y_m berosilasi. Secara umum untuk interval $\frac{1}{4} < \alpha < 1$ solusi berosilasi di sekitar titik kesetimbangan dan menuju ke nol, disebut dengan osilasi konvergen. Hal ini berarti bahwa kesetimbangan mengarah ke titik $N(t) = K$, yang berarti kesetimbangannya stabil. Pada kasus $\alpha = 1$, solusi berosilasi tetap atau tidak menjauh maupun mendekati titik kesetimbangan $N(t) = K$, hal ini berarti bahwa untuk $\alpha = 1$, kesetimbangan di titik $N(t) = K$ adalah stabil.

Penundaan yang semakin besar menyebabkan nilai α yang semakin besar pula sehingga populasi melebihi tingkat kesetimbangannya dan cenderung menjauhi titik kesetimbangan. Hal ini digambarkan untuk $\alpha > 1$. Pada bagian ini pertumbuhan populasi berosilasi dengan jumlah yang semakin besar dan tidak menuju ke titik kesetimbangan,disebut dengan osilasi divergen. Oleh karena osilasi yang terjadi tidak menuju ke titik kesetimbangan $N(t) = K$, maka untuk $\alpha > 1$ kesetimbangan menjadi tidak stabil.

Selanjutnya akan dianalisa perilaku kesetimbangan di sekitar titik kesetimbangan $N(t) = K$ untuk model logistik kontinu. Perturbasi di sekitar titik kesetimbangan $N(t) = K$ ditulis sebagai berikut

$$N(t) = K + \varepsilon N_1(t),$$
$$|\varepsilon N_1(t)| \le K \qquad (19)$$

$\varepsilon N_1(t)$ adalah perubahan dari titik kesetimbangan $N(t) = K$. Selanjutnya persaman (19) disubstitusikan kedalam persamaan (4) sehingga menghasilkan

$$\frac{\varepsilon dN_1(t)}{dt} = r(K + \varepsilon N_1(t))\left[1 - \frac{(K + \varepsilon N_1(t-\tau))}{K}\right],$$

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = rK - rK - rN_1(t-\tau) + rN_1(t) - rN_1(t) - \frac{rN_1(t)\varepsilon N_1(t-\tau)}{K} \qquad (20)$$

Dengan mengabaikan bentuk nonlinear $\frac{rN_1(t)\varepsilon N_1(t-\tau)}{K}$ pada persamaan (20) di atas, maka diperoleh persamaan berikut ini

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -rN_1(t-\tau) \qquad (21)$$

Dengan mengasumsikan solusi dari persamaan (21) di atas adalah $N_1(t) = ce^{\lambda t}$ maka persamaan karakte-ristiknya dapat ditentukan dengan men-substitusi $N_1(t) = ce^{\lambda t}$ ke persamaan (21) sehingga diperoleh

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -rN_1(t-\tau) \quad ,$$

$$\frac{de^{\lambda t}}{dt} = -re^{\lambda(t-\tau)} \quad ,$$

$$\lambda + re^{-\lambda\tau} = 0 \quad , \qquad (22)$$

dengan λ adalah solusi dari per-samaan karakteristik (22).

Pada teori linearisasi, jika terdapat solusi dari persamaan karakte-ristik memiliki bagian real yang bernilai positif maka titik kesetimbangannya dikatakan tidak stabil, dan jika semua solusi dari persamaan karakteristik memiliki bagian real yang bernilai negatif maka titik kesetimbangannya dikatakan stabil.

Selanjutnya λ ditulis dalam bentuk bilangan kompleks $\lambda = \mu + iv$ dengan μ dan v masing-masing merupakan bagian real dan imajiner dari λ. Dengan mensubstitusi $\lambda = \mu + iv$ ke persamaan karakteristik (22) diperoleh

$$(\mu + re^{-\mu\tau}\cos v\tau) + i(v - re^{-\mu\tau}\sin v\tau) = 0 \qquad (23)$$

dengan menyamakan komponen real dan imajiner pada ruas kiri dan kanan maka diperoleh

$$\mu + re^{-\mu\tau}\cos v\tau = 0 \quad , \qquad (23a)$$
$$v - re^{-\mu\tau}\sin v\tau = 0 \qquad (23b)$$

Untuk menganalisa kestabilan di titik $N(t) = K$ maka akan dilihat beberapa kasus dari τ sebagai berikut

a. Kasus $\tau = 0$ (Tidak terjadi penundaan pada proses pertumbuhan populasi)
   Untuk $\tau = 0$ persamaan karakteristik (22) menjadi
   $$\lambda + r = 0 \quad , \qquad (24)$$
   dari persamaan (24) di atas, nilai eigen $\lambda = -r < 0$ merupakan suatu bilangan real yang negatif. Solusi untuk persamaan (21) menjadi $N_1(t) = ce^{-rt}$. Hal ini berarti bahwa untuk $\tau = 0$ solusi $N_1(t)$ mendekati 0 atau dapat dikatakan bahwa titik kesetimbangan $N(t) = K$ stabil.
b. Kasus $\tau > 0$ (Terjadi penundaan pada proses pertumbuhan populasi)
   Akan ditentukan syarat dan kondisi dari $\tau > 0$ sehingga $\operatorname{Re}\lambda < 0$ agar kesetimbangan di titik $N(t) = K$ stabil. τ menunjukkan waktu tunda, sehingga τ merupakan variabel bebas yang kontinu. Oleh karena λ merupakan variabel tak bebas yang memuat τ maka λ juga kontinu. Titik $N(t) = K$ stabil jika nilai $\operatorname{Re}\lambda = \mu$ bernilai negatif ($\mu < 0$), dalam hal ini $\mu = 0$ menjadi batas atas agar titik kesetimbangan $N(t) = K$ stabil. Oleh karena itu akan dilihat kondisi τ untuk $\mu = 0$.
   Karena τ dan λ kontinu, akan dilihat nilai τ misal τ_0 yang memenuhi

$\operatorname{Re}\lambda(\tau_0) = \mu(\tau_0) = 0$. Dari hal ini maka diperoleh persamaan karakteristik (22) yang memiliki sepasang akar-akar imajiner murni $\pm iv_0$, dengan $v_0 = v(\tau_0)$. Dari persamaan (23a) untuk $\mu(\tau_0) = 0$ diperoleh

$$\cos v_0\tau = 0 \quad , \tag{25}$$

dimana menunjukan bahwa

$$v_0\tau_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k = 0,1,2... ,$$

dari $\mu(\tau_0) = 0$ dan $\cos v_0\tau = 0$ yang ada diperoleh $v_0 = v(\tau_0)$ pada persamaan (23b) sebagai berikut

$$v_0 = re^{-\tau 0}\sin v_0\tau \quad ,$$

$$v_0 = r \quad ,$$

Untuk $v_0 = r$, $v_0\tau_k$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\tau_k = \frac{\pi}{2r} + \frac{2k\pi}{r}, k = 0,1,2... ,$$

Oleh karena itu $\operatorname{Re}\lambda(\tau_0) = \mu(\tau_0) = 0$ untuk $\tau = \tau_0 = \frac{\pi}{2r}$

Dengan melihat kondisi dari τ, untuk $\tau = 0$ nilai μ yang diperoleh adalah –r, dan untuk $\tau = \frac{\pi}{2r}$ nilai μ yang diperoleh adalah 0. Dari kedua hal tersebut dapat diketahui bahwa untuk $0 \le \tau < \frac{\pi}{2r}$ nilai $\operatorname{Re}\lambda = \mu$ bernilai negatif. Hal ini berarti bahwa kesetimbangan di titik N(t) = K stabil . Selanjutnya akan dianalisa kestabilan untuk $\tau > \frac{\pi}{2r}$.

c. Kasus $\tau > \frac{\pi}{2r}$

Misalkan $\tau = \tau_C + \varepsilon$

$$\tau = \frac{\pi}{2r} + \varepsilon \quad , \quad 0 < \varepsilon \le 1$$

Untuk $\tau = \frac{\pi}{2r}$ diketahui bahwa nilai $\mu = 0$ dan $v = r$. Untuk ε yang sangat kecil, μ dan v berubah menjadi $\mu = \delta$ dan $v = r + \sigma$,

$$0 < \delta \le 1 \quad , \quad 0 < \sigma \le 1 \tag{26}$$

dengan δ dan σ akan ditentukan dengan mensubstitusi persamaan (26) ke persamaan (23a) dan persamaan (23b) sehingga diperoleh

$$r + \sigma = r\exp\left[-\delta(\frac{\pi}{2r} + \varepsilon)\right]\sin\left[(r+\sigma)(\frac{\pi}{2r} + \varepsilon)\right] \tag{27a}$$

dan

$$\delta = -r\exp\left[-\delta(\frac{\pi}{2r} + \varepsilon)\right]\cos\left[(r+\sigma)(\frac{\pi}{2r} + \varepsilon)\right] . \tag{27b}$$

Dengan melakukan ekspansi untuk σ, δ, dan ε yang sangat kecil maka diperoleh

$$\delta \approx \frac{r^2\varepsilon}{1 + \frac{\pi^2}{4}}$$

dan

$$\sigma \approx -\frac{r^2\varepsilon\pi}{2\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)}$$

Dari nilai δ dan σ yang telah diperoleh maka solusi dari persamaan (21) dapat ditulis

$$N_1(t) = ce^{\lambda t} \quad ,$$

$$N_1(t) = \operatorname{Re}\left\{ce^{(\mu + iv)t}\right\} \quad ,$$

Dengan mengganti nilai μ dan v yang baru maka

$$N_1(t) = \operatorname{Re}\left\{c\exp\left[\delta t + i(r+\sigma)t\right]\right\} \quad ,$$

$$N_1(t) = \operatorname{Re}\left\{c\exp\left[\frac{r^2\varepsilon t}{1 + \frac{\pi^2}{4}}\right]\exp\left[it\left(r - \frac{r^2\varepsilon\pi}{2\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)}\right)\right]\right\}$$

atau dapat ditulis

$$N_1(t) = \mathrm{Re}\left\{ c\left(\exp\left[\frac{r^2 \varepsilon t}{1+\frac{\pi^2}{4}}\right]\right)\left(\cos t\left[r - \frac{r^2\varepsilon\pi}{2\left(1+\frac{\pi^{2\tau}}{4}\right)}\right] + i\sin t\left[r - \frac{r^2\varepsilon\pi}{2\left(1+\frac{\pi^{2\tau}}{4}\right)}\right]\right)\right\}$$

$$N_1(t) = c\left(\exp\left[\frac{r^2 \varepsilon t}{1+\frac{\pi^2}{4}}\right]\right)\left(\cos t\left[r - \frac{r^2\varepsilon\pi}{2\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right]\right) \quad (28)$$

Untuk nilai ε yang bernilai negatif atau pada $\tau < \frac{\pi}{2r}$, solusi berosilasi dan menuju ke nol. Hal ini berarti bahwa solusi mengarah ke kesetimbangan populasi, sehingga untuk $\tau < \frac{\pi}{2r}$ kesetimbangan stabil. Untuk nilai $\varepsilon = 0$, atau pada $\tau = \frac{\pi}{2r}$, solusinya merupakan suatu fungsi cosines yang osilasinya stabil dan tidak mengarah ke titik kesetimbangan. Untuk $\varepsilon > 0$, semakin besar nilai ε yang dipakai berarti τ (waktu tunda) juga semakin besar. Untuk τ yang semakin besar ($\tau > \frac{\pi}{2r}$) solusi berosilasi semakin besar dan menjauhi titik kesetimbangan. Hal ini berarti kesetimbangan menjadi tidak stabil.

Jika periode dari solusi yang berosilasi di atas adalah T dan periode untuk fungsi trigonometri adalah 2π maka T dapat ditentukan melalui

$$\cos\omega(t+T) = \cos\omega t + 2\pi \ ,$$

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi \ ,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{r+\sigma} \ ,$$

$$T = \frac{2\pi}{r - \frac{r^2\varepsilon\pi}{2\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)}} \approx \frac{2\pi}{r}$$

Dari perhitungan periode di atas maka dapat diperoleh periode osilasi untuk nilai $\tau = \frac{\pi}{2r}$ adalah sebesar 4τ .

d. Kasus $\tau = \frac{\pi}{2r}$

Nilai $\tau = \frac{\pi}{2r}$ adalah nilai bifurkasi, yakni nilai yang mengubah suatu keadaan setimbang stabil berubah menjadi suatu keadaan setimbang yang tidak stabil. Dalam hal ini jika waktu tunda τ meningkat melebihi nilai bifurkasi $\tau = \frac{\pi}{2r}$, maka keadaan setimbang menjadi tidak stabil. Untuk $\tau = \frac{\pi}{2r}$ belum bisa ditentukan kestabilannya dan perlu pengkajian lebih mendalam mengenai bifurkasi.

3. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan mengenai model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda dapat disimpulkan bahwa penundaan dalam pertumbuhan populasi yang mengikuti model pertumbuhan logistik menyebabkan terjadinya osilasi sehingga mempengaruhi kestabilan di sekitar titik kesetimbangan. Model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda setimbang pada jumlah populasi nol dan pada jumlah populasi yang sama dengan *Carrying capacity.* Pada jumlah populasi nol, keadaan setimbangnya tidak stabil. Untuk jumlah populasi yang sama dengan *Carrying capacity* keadaan setimbangnya stabil untuk waktu tunda yang kurang dari $\frac{\pi}{2r}$, dan tidak stabil untuk waktu tunda yang lebih besar dari

$\frac{\pi}{2r}$, sedangkan untuk waktu tunda yang sama dengan $\frac{\pi}{2r}$ terjadi bifurkasi. Secara umum semakin besar waktu tunda dalam per-tumbuhan populasi menyebabkan ketidak-stabilan terhadap pertumbuhan, dalam hal ini terjadi ledakan populasi dan juga populasi dapat berkurang hingga akhirnya me-ngalami kepunahan.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard (1987), *Aljabar Linear Elementer*, Erlangga, Jakarta

[2] Cheng, A.K (2006), *Differential Equations : Models and Methods*, Mc Graw Hill, Singapore

[3] Forys, U. , Czochra, M.A (2003), *Logistik Equations in Tumour Growth Modelling*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. , Vol. 13, No. 3, 317-325

[4] Haberman, Richard (1977), *Mathematical Models : Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*, Prentice-Hall Inc., New Jersey

[5] Murray, J.D (1993), *Mathematical Biology*, SpringerVerlag, Heidelberg Berlin

[6] Purcell & Varberg (1987), *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Erlangga, Jakarta

[7] Purnomo,D. Kosala (2000), *Model Pertumbuhan Populasi Dengan Memodifikasi Model Pertumbuhan Logistik*, Majalah Matematika dan Statistika Vol.1, No.1, Oktober 2000 : 21-29

[8] Ruan, Shigui, --------. *Delay Differential Equations In Single Species Dynamics*, Department of Mathematics University of Miami, USA

[9] Tarumingkeng, C. Rudy (1994), *Dinamika Populasi Kajian Ekologi Kuantitatif*, Pustaka Sinar Harapan, Jakarta

[10] Vries, G & Hillen T (2004), *A Short Course in Mathematical Biology*, Tuebingen

[11] Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Differensial*, Graha Ilmu ,Yogyakarta