I L M U U K U R S E G I T I G A B O L A

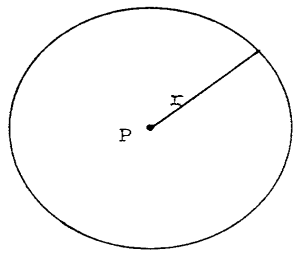
Oleh
Drs. K O E S D I O N O

JURUSAN TEKNIK GEODESI
FAKULTAS TEKNIK SIPIL & PERENCANAAN
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

DAFTAR ISI

1. DEFINISI DAN ISTILAH

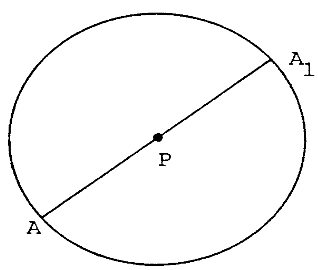
Tempat kedudukan titik-titik yang berjarak r dari titik tetap **P** dinamakan **permukaan bola** atau **bola.** Lihat gambar 1 **P** dinamakan **pusat bola** dan r dinamakan **jejari bola.**



Gambar 1

P = pusat bola ; r = Jejari bola

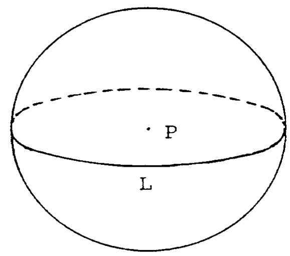
Misalkan titik A pada permukaan bola. Garis yang menghubungkan A dengan pusat P, lanjutannya akan memotong permukaan bola pada titik A_1. Titik A_1 dinamakan **titik lawan** dari A, sebaliknya A dinamakan titik lawan dari A_1. Lihat gambar 2 di bawah ini :



Gambar 2

A_1 = titik lawan A
A = titik lawan A_1

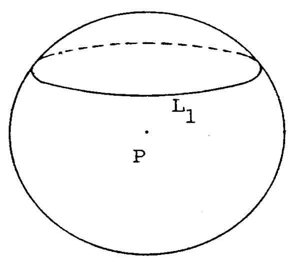
Irisan permukaan bola dengan bidang datar yang melalui pusat bola, dinamakan **lingkaran besar.** Lihat gambar 3 :



Gambar 3

L = Lingkaran besar

Irisan permukaan bola dengan bidang yang berjarak dari pusat bola lebih kecil dari jejari bola, dinamakan **lingkaran kecil.** Lihat gambar 4 :

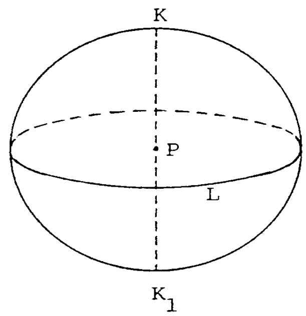


Gambar 4

L_1 = Lingkaran kecil

Misalkan P pusat dari lingkaran besar L (P juga pusat dari bola). Garis melalui P yang tegak lurus pada bidangnya lingkaran L, memotong permukaan bola pada dua titik K dan K_1. K dan K_1 dinamakan **kutub-kutub** dari l;ingkaran besar L. Garis KK_1 dinamakan **poros** dari lingkaran besar L. Lihat gambar 5 :

Gambar 5

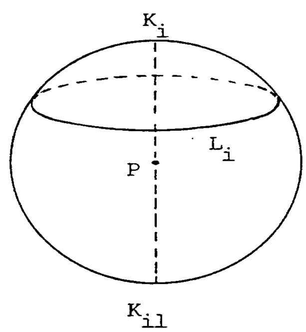


K dan K_1 : Kutub-kutub dari L

K K_1 : Poros dari L

Demikian juga lingkaran kecil L_1, mempunyai kutub dan poros. Lihat gambar 6 :

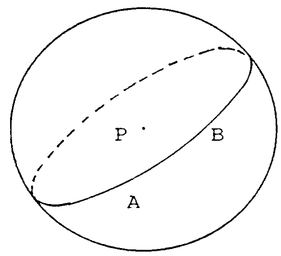
Gambar 6



K_i dan K_{i1} : Kutub-kutub dari L_i

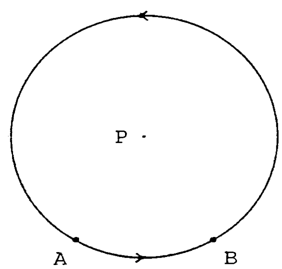
K_i K_{i1} : Poros dari L_i

Lingkaran besar ditentukan oleh dua titik pada bola. Misal kan titik A dan titik B pada bola. Buat bidang yang melalui A, B dan P (P adalah pusat bola). Irisannya dengan bola adalah lingkaran besar yang melalui A dan B. Lihat gambar 7 :



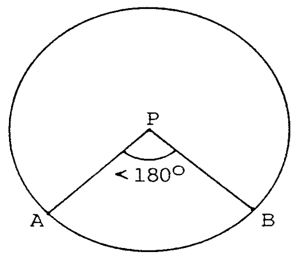
Gambar 7
Lingkaran besar melalui A dan B

Lingkaran besar yang melalui A dan B terdiri dari dua busur. Busur AB dan busur BA. Lihat gambar 8 :



Gambar 8
Dua busur AB dan BA

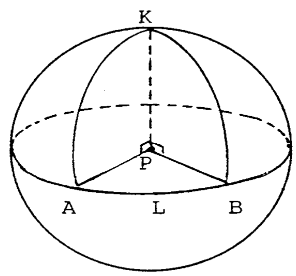
Panjang busur dinyatakan dalam derajat atau radial. Pada gambar 8, busur terpendek AB (besarnya kurang dari 180°) dinamakan **jarak sferis** antara A dan B. Lihat gambar 9 :



Gambar 9
Busur AB adalah jarak sferis antara A dan B

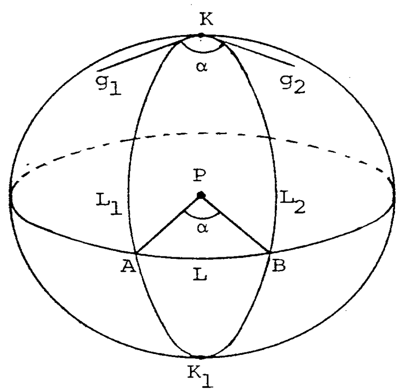
Jarak sferis antara A dan B adalah jarak terpendek pada permukaan bola antara A dan B.

Jarak sferis dari setiapp titik pada lingkaran besar ke kutubnya, semua sama, dan sama dengan 90° atau $\frac{1}{2}\pi$.
Lihat gambar 10 :



Gambar 10
Busur KA sama dengan busur KB

Perhatikan gambar 11 :



Gambar 11

α : sudut diantara lingkaran besar L_1 dan lingkaran kecil L_2

Lingkaran besar L_1 dan lingkaran besar L_2 saling memotong di K dan K_1. Buat garis singgung g_1 pada L_1 di K dan garis singgung g_2 pada L_2 di K. Sudut α diantara g_1 dan g_2 dinamakan **sudut diantara lingkaran besar** L_1 dan L_2. Bila A dan B adalah titik potong diantara lingkaran besar L (dengan kutub-kutub K dan K_1) dengan lingkaran besar L_1 dan L_2, maka $\alpha = \angle APB$. Sudut α sama juga dengan sudut di antara bidangnya lingkaran besar L_1 dan bidangnya lingkaran besar L_2.

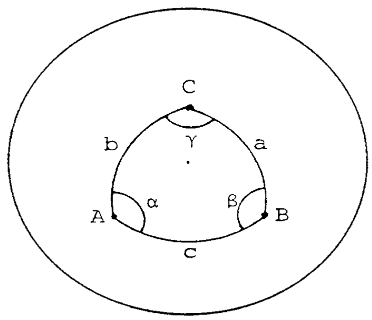
Pertanyaan :

Definisikan istilah-istilah berikut :

1. bola
2. pusat bola
3. jejari bola
4. titik lawan
5. lingkaran besar
6. lingkaran kecil
7. kutub
8. poros lingkaran besar (kecil)
9. jarak sferis
10. sudut diantara dua lingkaran besar !

2. SEGITIGA BOLA

Tiga titik A, B dan C pada permukaan bola. Buat jarak sferis AB, BC dan CA. Bagian dari permukaan bola yang dibatasi oleh ketiga jaraak sferis tersebut, dinamakan **segitiga bola** ABC. Lihat gambar 12 :



Gambar 12
Segitiga bola ABC

Jarak sferis AB, BC dan CA dinamakan **sisi-sisi** dari segitiga bola ABC. Jarak sferis AB dinamakan sisi c, jarak sferis BC sisi a dan jarak sferis CA sisi b. Sudut-sudut di A, B dan C diberi nama α, β dan γ dan dinamakan **sudut-sudut** dari segitiga bola ABC. a, b, c, α, β dan γ dinamakan **unsur-unsur** segitiga bola ABC.

Selanjutnya yang akan ditinjau adalah segitiga bola dengan sisi dan sudut yang lebih kecil dari 180^{o}.

2.1. SEGITIGA BOLA LAWAN

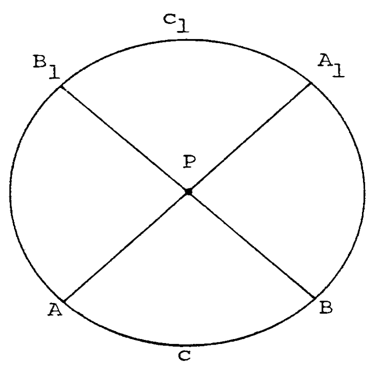
Ketiga lingkaran besar yang melalui tiga titik A, B, dan C pada permukaan bola, berpotongan pada enam titik A, A_1, B, B_1, C dan C_1. Segitiga bola $A_1B_1C_1$ dinamakan **segitiga bola lawan** dari segitiga bola ABC, sebaliknya segitiga bola ABC adalah segitiga bola lawan dari segitiga bola $A_1B_1C_1$.

Hubungan antara unsur-unsur segitiga bola dengan segitiga bola lawannya :

	Δ ABC	Δ $A_1B_1C_1$
S i s i	a, b, c	a_1, b_1, c_1
Sudut	α, β, γ	α_1, β_1, γ_1

Dari gambar 13 dengan mudah dapat dilihat bahwa :

$$a = a_1 \qquad \alpha = \alpha_1$$
$$b = b_1 \qquad \beta = \beta_1$$
$$c = c_1 \qquad \gamma = \gamma_1$$

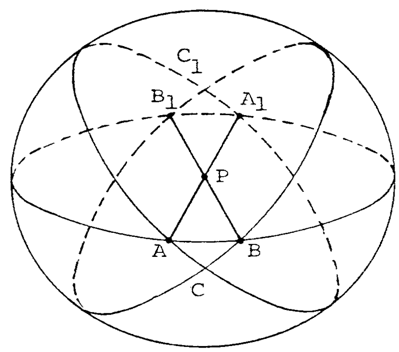


Gambar 13

Sisi c = sisi c_1

2.2. SEGITIGA BOLA SAMPING

Segitiga bola A_1BC, AB_1C dan ABC_1 dinamakan **segitiga bola samping** dari segitiga bola ABC. Lihat gambar 14 :



Gambar 14

A_1BC, AB_1C dan ABC_1 = segitiga bola samping dari segitiga bola ABC.

Hubungan antara unsur-unsur segitiga bola ABC dengan segitiga bola sampingnya A_1BC dapat dilihat dari gambar 14.

	ABC	A_1BC
S i s i	a, b, c	$a,\ 180^\circ - b,\ 180^\circ - c$
Sudut	α, β, γ	$\alpha,\ 180^\circ - \beta,\ 180^\circ - \gamma$

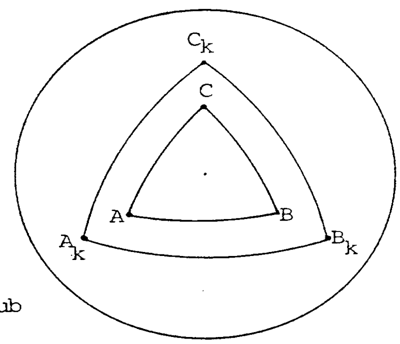
Dan diantara segitiga bola ABC dengan segitiga bola sampingnya AB_1C dan ABC_1 adalah sebagai berikut :

	ABC	AB_1C
S i s i	a, b, c	$180^\circ - a,\ b,\ 180^\circ - c$
Sudut	α, β, γ	$180^\circ - \alpha,\ \beta,\ 180^\circ - \gamma$

	ABC	ABC_1
S i s i	a, b, c	$180^\circ - a,\ 180^\circ - b,\ c$
Sudut	α, β, γ	$180^\circ - \alpha,\ 180^\circ - \beta,\ \gamma$

2.3. SEGITIGA BOLA KUTUB

Diberikan segitiga bola ABC. Titik A_k adalah kutub dari lingkaran besar BC, yang terletak sepihak dengan A terhadap busur BC. Titik B_k adalah kutub dari lingkaran besar AC, yang sepihak dengan B terhadap busur AC dan titik C_k adalah kutub dari lingkaran besar AB, yang sepihak dengan C terhadap busur AB. Lihat gambar 15 berikut :



Gambar 15

$A_kB_kC_k$: segitiga bola kutub dari segitiga bola ABC

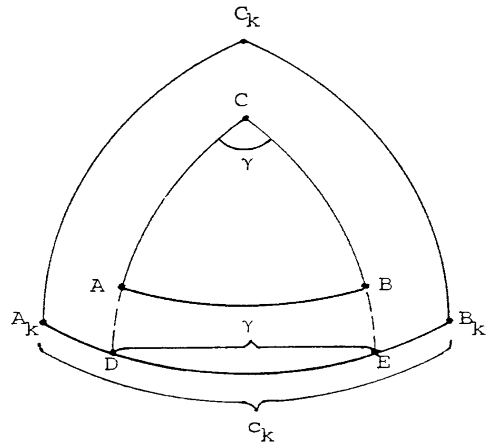
Segitiga bola $A_kB_kC_k$ dinamakan **segitiga bola kutub** dari segitiga bola ABC, sebaliknya segitiga bola ABC adalah segitiga bola kutub dari segitiga bola $A_kB_kC_k$.

Bukti :

C_k kutub dari AB, jadi jarak sferis $AC_k = 90^o$
B_k kutub dari AC, jadi jarak sferis $AB_k = 90^o$
Berarti A adalah kutub dari B_kC_k. Demikian juga B adalah kutub dari C_kA_k dan C adalah kutub dari A_kB_k.
Jadi ABC adalah segitiga bola kutub dari $A_kB_kC_k$.

Hubungan antara unsur-unsur segitiga bola dengan segitiga bola kutubnya, perhatikan gambar 16 berikut :

Gambar 16



Lanjutkan busur CA dan busur CB memotong busur A_kB_k di titik D dan E.

Dari gambar 16 dapat dilihat :

$$\begin{aligned} c_k = A_kB_k = A_kE + EB_k &= 90^\circ + DB_k - \gamma \\ &= 90^\circ + 90^\circ - \gamma \\ &= 180^\circ - \gamma \end{aligned}$$

Telah didapat : $c_k = 180^\circ - \gamma$ ....(1)

Dengan cara yang sama didapat :

$a_k = 180^\circ - \alpha$ ....(2)

$b_k = 180^\circ - \beta$ ....(3)

Karena segitiga bola ABC adalah segitiga bola kutub dari segitiga bola $A_kB_kC_k$, maka berlaku :

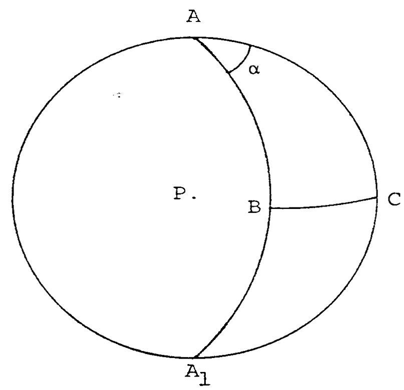
$a = 180^\circ - \alpha_k$ ....(4)

$b = 180^\circ - \beta_k$ ....(5)

$c = 180^\circ - \gamma_k$ ....(6)

2.4. LUAS SEGI-DUA BOLA

Perhatikan gambar 17 :



Gambar 17

Segi-dua bola A (BC) A_1

Bagian dari permukaan bola yang dibatasi oleh setengah lingkaran besar ABA_1 dan setengah lingkaran besar ACA1 dinamakan **segi-dua bola** $A(BC)A_1$.

Bila sudut diantara kedua lingkaran besar tersebut adalah α, maka luas $A(BC)A_1 = \frac{\alpha}{360}$ luas permukaan bola.

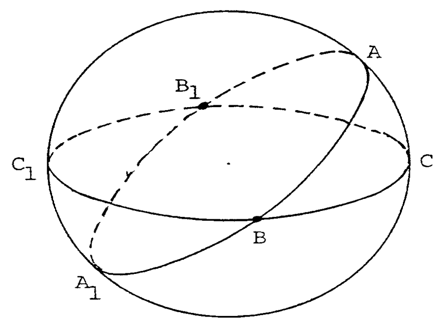
Jadi :

$$\text{Luas } A(BC)A_1 = \frac{\alpha}{360} L \qquad \text{........ (1)}$$

dengan L adalah luas permukaan bola.

2.5. LUAS SEGITIGA BOLA; EKSES SFERIS

Perhatikan segitiga bola ABC pada gambar 18 :



Gambar 18

Luas ABC $= \frac{E}{720}$ L

$$\text{Luas A (BC) } A_1 = \frac{\alpha}{360} \text{ L} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{Luas C (AB) } C_1 = \frac{\gamma}{360} \text{ L} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{Luas B } (A_1C_1)\ B_1 = \frac{\beta}{360} \text{ L} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Dari menjumlahkan ketiga persamaan di atas didapat :

$$\tfrac{1}{2}\text{L} + \text{luas ABC} + \text{luas } A_1B_1C_1 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360} \text{ L} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\tfrac{1}{2}\text{L} + 2 \text{ luas ABC} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360} \text{ L} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Jadi :

$$\text{Luas ABC} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{720} \text{ L} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Karena luas ABC dan L (luas permukaan bola) adalah positif maka dari (6) didapat :

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^o \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Misalkan : $\alpha + \beta + \gamma - 180^o = E$, maka persamaan (6) dapat juga ditulis :

$$\text{Luas segitiga bola ABC} = \frac{E_4}{720}\eta\ r^2 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

dengan r adalah jejari bola dan E dinamakan **ekses sferis** dari segitiga ABC.

2.6. HUBUNGAN DIANTARA UNSUR-UNSUR SEGITIGA BOLA

Dari ketidaksamaan (7) dari pasal **2.4.**, didapat :

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ \qquad \text{........ (1)}$$

Ketidaksamaan di atas diterapkan pada segitiga bola sampingnya A_1BC :

$$\alpha + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) > 180^\circ \qquad \text{........ (2)}$$

Didapat :

$$\alpha + 180^\circ > \beta + \gamma \qquad \text{........ (3)}$$

Bila diterapkan pada segitiga bola samping AB_1C dan ABC_1 , didapat :

$$\beta + 180^\circ > \alpha + \gamma \qquad \text{........ (4)}$$

$$\gamma + 180^\circ > \alpha + \beta \qquad \text{........ (5)}$$

Ketidaksamaan $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ diterapkan pada segitiga bola kutubnya $A_kB_kC_k$:

$$(180^\circ - a) + (180^\circ - b) + (180^\circ - c) > 180^\circ \qquad \text{........ (6)}$$

atau :

$$a + b + c < 360^\circ \qquad \text{........ (7)}$$

Jadi juga berlaku untuk setiap segitiga bola ABC :

$$a + b + c < 360^\circ \qquad \text{........ (8)}$$

Dari ketidaksamaan $\alpha + 180^\circ > \beta + \gamma$, diterapkan pada segitiga bola kutubnya, didapat :

$$(180^\circ - a) + 180^\circ > (180^\circ - b) + (180^\circ - c) \qquad \text{........ (9)}$$

Didapat :

$$a < b + c \qquad \text{........(10)}$$

$$b < a + c \qquad \text{........(11)}$$

$$c < a + b \qquad \text{........(12)}$$

Buktikan sendiri kedua sifat berikut :

Untuk setiap segitiga bola ABC, berlaku :

1). Bila $a = b$, maka $\alpha = \beta$ dan sebaliknya
2). Bila $a > b$, maka $\alpha > \beta$ dan sebaliknya.

Ringkasan :

Untuk setiap segitiga bola ABC, dengan sisi-sisi a,b, c, dan sudut-sudut α, β, γ berlaku :

$$180^o < \alpha + \beta + \gamma > 540^o$$
$$\alpha + \beta < \gamma + 180^o$$
$$\beta + \gamma < \alpha + 180^o$$
$$\alpha + \gamma < \beta + 180^o$$

$$0^o < a + b + c < 360^o$$
$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

$$a = b \leftrightarrows \alpha = \beta$$
$$a > b \leftrightarrows \alpha > \beta$$

SOAL - SOAL

1. Kenapa tidak mungkin segitiga bola dengan unsur - unsur sebagai berikut :

   (a). $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 60^\circ$
   (b). $a = 125^\circ$, $b = 130^\circ$, $c = 120^\circ$
   (c). $a = 165^\circ$, $b = 100^\circ$, $c = 60^\circ$
   (d). $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 125^\circ$
   (e). $\alpha = 125^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$

2. Mendekati berapa jumlah dari sudut-sudut dari segitiga bola bila segitiga bolanya sangat kecil ?

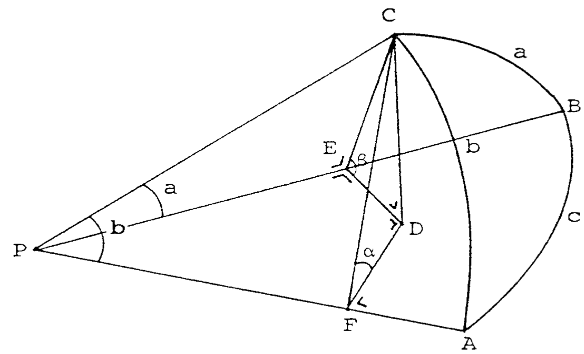
3. Sudut-sudut segitiga bola adalah $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 70^\circ$ dan sisinya adalah 50°, 60°, dan 40°.
   Berapa besar sisi a, sisi b, dan sisi c ?

4. Tunjukkan bahwa bila suatu segitiga bola mempunyai dua sudut siku-siku, maka sudut ketiga sama dengan sisi di depannya !

5. Dua lingkaran besar berpotongan dengan sudut 40°.
   Berapa jarak terpendek dari kutub salah satu lingkaran besar ke lingkaran besar lainnya ?

3. RUMUS SINUS

Perhatikan segitiga bola ABC pada **bola satuan** (bola dengan jejari satu). Lihat gambar 19 berikut ini :



Gambar 19
Segitiga bola ABC pada bola satuan

Dalam segitiga PCE, siku-siku di E :

$$CE = \sin a \qquad \text{........ (1)}$$

Dalam segitiga CED, siku-siku di D :

$$CD = CE \sin \beta = \sin a \sin \beta \qquad \text{........ (2)}$$

Dalam segitiga PCF, siku-siku di F :

$$CF = \sin b \qquad \text{........ (3)}$$

Dalam segitiga CDF, siku-siku di D :

$$CD = CF \sin \alpha = \sin b \sin \alpha \qquad \text{........ (4)}$$

Dari (2) dan (4) :

$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha \qquad \text{........ (5)}$$

atau :

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \qquad \text{........ (6)}$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \qquad \text{........ (7)}$$

Dari (6) dan (7) didapat :

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \qquad \text{........ (8)}$$

Persamaan ini dinamakan **rumus sinus**.

C o n t o h :

Dari segitiga bola ABC, diberikan :

$a = 120.00^{o}$, $b = 60.00^{o}$ dan $\alpha = 95.85^{o}$

Cari sudut β !

Penyelesaian :

$$\frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin a} \longrightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sin a} \sin b$$

atau :

$$\sin \beta = \frac{\sin 95.85^{o}}{\sin 120.00^{o}} \sin 60.00^{o}$$

Didapat :

$$\beta = 84.15^{o}$$

Soal-soal :

Dari segitiga bola berikut, tentukan unsur-unsur yang ditanyakan !

1. $\alpha = 108.67^{\circ}$; $\beta = 134.33^{\circ}$; $a = 145.00^{\circ}$

   Ditanyakan : b

   Jawaban : $b = 154.75^{\circ}$

2. $a = 117.15^{\circ}$; $b = 27.37^{\circ}$; $\alpha = 47.35^{\circ}$

   Ditanyakan : β

   Jawaban : $\beta = 22.33^{\circ}$

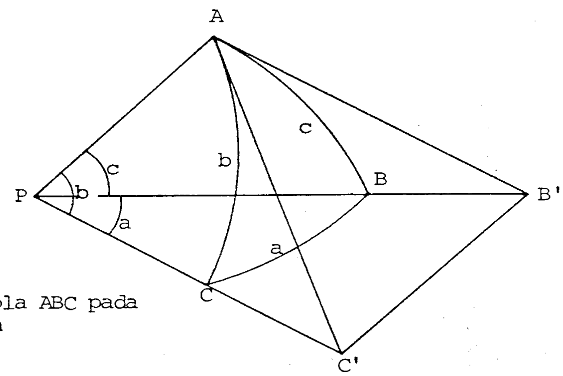
3. $\beta = 133.30^{\circ}$; $\gamma = 70.27^{\circ}$; $c = 32.98^{\circ}$

   Ditanyakan : b

   Jawaban : $b = 155.08^{\circ}$

4. RUMUS COSINUS

Segitiga bola ABC pada bola satuan. Lihat gambar 20 :



Gambar 20

Segitiga bola ABC pada bola satuan

Garis singgung pada busur AB di A memotong perpanjangan PB di B' dan garis singgung pada busur AC di A memotong per panjangan PC di C'.

Pada segitiga PB'C' dan segitiga AB'C' diterapkan **rumus cosinus.**

$$(B'C')^2 = (PC')^2 + (PB')^2 - 2\ PC' \times PB' \cos a$$

$$= (AC')^2 + (AB')^2 - 2\ AC' \times AB' \cos \alpha \qquad ..(1)$$

Dari segitiga siku-siku PAC' dan PAB' didapat :

$$\cos b = \frac{1}{PC'} \quad \text{atau}$$

$$PC' = \frac{1}{\cos b} \qquad ....(2)$$

$$\cos c = \frac{1}{PB'} \quad \text{atau}$$

$$PB' = \frac{1}{\cos c} \qquad ....(3)$$

$$AC' = \tan b \qquad ....(4)$$

$$AB' = \tan c \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Substitusi (2), (3), (4) dan (5) dalam (1) :

$$\frac{1}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 c} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} =$$

$$\tan^2 b + \tan^2 c - 2 \tan b \tan c \cos \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

atau :

$$\frac{1}{\cos^2 b} - \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 c} - \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} =$$

$$- 2 \tan b \tan c \cos \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

atau :

$$\frac{1 - \sin^2 b}{\cos^2 b} + \frac{1 - \sin^2 c}{\cos^2 c} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} =$$

$$- \frac{2 \sin b}{\cos b} \frac{\sin c}{\cos c} \cos \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

atau :

$$2 - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} = - 2 \frac{\sin b}{\cos b} \frac{\sin c}{\cos c} \cos \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Dengan membagi 2 dan mengalikan dengan cos b cos c :

$$\cos b \cos c - \cos a = - \sin b \sin c \cos \alpha \qquad \ldots\ldots (10)$$

Jadi :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \qquad \ldots\ldots (11)$$

Dengan cara yang sama dicapat :

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \qquad \ldots\ldots (12)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \qquad \ldots\ldots (13)$$

Ketiga rumus terakhir dinamakan **rumus cosinus untuk sisi.**

Kita terapkan rumus cosinus untuk sisi pada segitiga bola kutub dari segitiga bola ABC, yaitu segitiga bola A'B'C' dengan unsur-unsur :

$$a' = 180^\circ - \alpha \quad , \quad \alpha' = 180^\circ - a$$
$$b' = 180^\circ - \beta \quad , \quad \beta' = 180^\circ - b$$
$$c' = 180^\circ - \gamma \quad , \quad \gamma' = 180^\circ - c$$

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha' \quad ..(14)$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = \cos (180^\circ - \beta) \cos (180^\circ - \gamma) + \sin (180^\circ - \beta) \sin (180^\circ - \gamma) \cos (180^\circ - a) \quad ...(15)$$

$$- \cos \alpha = (- \cos \beta)(- \cos \gamma) + \sin \beta \sin \gamma (- \cos a) \quad ......(16)$$

Dengan mengalikan (16) dengan -1, didapat :

$$\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \quad ......(17)$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$\cos \beta = - \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b \quad ......(18)$$

$$\cos \gamma = - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \quad ......(19)$$

Ketiga rumus terakhir dinamakan **rumus cosinus untuk sudut.**

C o n t o h :

1. Dari segitiga bola ABC, diberikan $b = 60^\circ$, $c = 30^\circ$ dan sudut $\alpha = 45^\circ$. Tentukan sisi a !

   Penyelesaian :

   Rumus cosinus untuk sisi :

   $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

   $$\cos a = \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

   $$a = 42^\circ\ 20'\ 12.41''$$

Dalam contoh-contoh berikut unsur-unsur yang diberikan adalah sd.sd.sd. atau s.s.s. Melalui rumus cosinus dapat ditentukan disi atau sudut.

C o n t o h :

1. Dari segitiga bola ABC, diberikan $a = 60^o$, $b = 60^o$, $c = 60^o$. Tentukan α !

   Penyelesaian :

   $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

   $$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

   $$\alpha = 70^o\ 31'\ 43.61''$$

2. Dari segitiga bola ABC diberikan $\alpha = 60^o$, $\beta = 60^o$, $\gamma = 120^o$. Cari a !

   $$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

   $$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

   $$a = 70^o\ 31'\ 43.61''$$

Soal-soal :

Dari segitiga bola ABC yang diberikan unsur-unsurnya seperti berikut, tentukan unsur yang ditanyakan !

(a). $a = 120^o$, $b = 90^o$, $c = 60^o$
C a r i : β
Jawaban : $\beta = 71^o$

(b). $a = 120^o$, $b = 150^o$, $c = 60^o$
C a r i : γ
Jawaban : $\gamma = 87^o\ 47'\ 0.69''$

(c). $\alpha = 120^{\circ}$, $\beta = 90^{\circ}$, $\gamma = 60^{\circ}$

Cari : b

Jawaban : $b = 109^{\circ}\ 28'\ 16.3''$

(d). $\alpha = 60^{\circ}$, $\beta = 150^{\circ}$, $\gamma = 60^{\circ}$

Cari : c

Jawaban : $c = 81^{\circ}\ 06'\ 2.06''$

(e). $a = 60^{\circ}$, $b = 120^{\circ}$, $\gamma = 150^{\circ}$

Cari : c, α, β

Jawaban : $c = 154^{\circ}\ 05'\ 41.74''$
$\alpha = 82^{\circ}\ 22'\ 09.76''$
$\beta = 97^{\circ}\ 37'\ 50.67''$

(f). $b = 59^{\circ}\ 12'\ 16''$, $c = 35^{\circ}37'18''$, $\alpha = 124^{\circ}17'52''$

Cari : a, β, γ

Jawaban : $a = 82^{\circ}\ 17'\ 03.99''$
$\beta = 45^{\circ}\ 44'\ 06.25''$
$\gamma = 29^{\circ}\ 02'\ 55''$

(g). $a = 124^{\circ}12'31''$, $\beta = 128^{\circ}41'49''$, $\gamma = 107^{\circ}33'20''$

Cari : b, c, α

Jawaban : $b = 125^{\circ}\ 41'\ 44''$
$c = 82^{\circ}\ 47'\ 35''$
$\alpha = 127^{\circ}\ 22'\ 07''$

(h). $\alpha = 59^{\circ}55'10''$, $\beta = 85^{\circ}36'50''$, $\gamma = 50^{\circ}55'10''$

Cari : a, b, c

Jawaban : $a = 44^{\circ}\ 46'\ 36''$
$b = 54^{\circ}\ 14'\ 56''$
$c = 39^{\circ}\ 11'\ 10''$

(i). $a = 131^{o}35'04''$, $b = 108^{o}30'14''$, $c = 84^{o}46'34''$

Cari : α , β, γ

Jawaban : $\alpha = 132^{o}\ 14'\ 20''$

$\beta = 110^{o}\ 10'\ 40''$

$\gamma = 99^{o}\ 42'\ 24''$

Dari soal-soal di atas dapat diambil kesimpulan, bila dari suatu segitiga bola diberikan tiga unsurnya : s.sd.s. atau sd.s.sd. atau s.s.s. atau sd.sd.sd., maka dengan menggunakan rumus cosinus untuk sisi dan rumus cosinus untuk sudut, ketiga unsur yang lain dari segitiga bola dapat ditentukan.

5. SEGITIGA BOLA SIKU-SIKU

5.1. RUMUS NAPIER

Segitiga bola dengan salah satu sudutnya siku-siku di namakan **segitiga bola siku-siku.**
Rumus cosinus dan rumus sinus akan kita terapkan pada segi tiga bola siku-siku dengan sudut $\gamma = 90^o$ (atau sudut C = 90^o).

Rumus cosinus untuk sisi :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Rumus cosinus untuk sudut :

$$\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \qquad \ldots. (4)$$
$$\cos \beta = - \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b \qquad \ldots. (5)$$
$$\cos \gamma = - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \qquad \ldots. (6)$$

Rumus sinus :

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Untuk segitiga bola siku-siku dengan $\gamma = 90^o$, persamaan (3), (7), (8), (4), (5) dan (6) menjadi :

$$\cos c = \cos a \cos b \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$
$$\sin a = \sin \alpha \sin c \qquad \ldots\ldots\ldots (10)$$
$$\sin b = \sin \beta \sin c \qquad \ldots\ldots\ldots (11)$$
$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \qquad \ldots\ldots\ldots (12)$$
$$\cos \beta = \sin \alpha \cos b \qquad \ldots\ldots\ldots (13)$$
$$\cos c = \cot \alpha \cot \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Dari keenam persamaan terakhir dapat diturunkan rumus berikut :

$$\sin a = \tan b \cot \beta \qquad \ldots\ldots\ (15)$$

$$\sin b = \tan a \cot \alpha \qquad \ldots\ldots\ (16)$$

$$\cos \alpha = \tan b \cot c \qquad \ldots\ldots\ (17)$$

$$\cos \beta = \tan a \cot c \qquad \ldots\ldots\ (18)$$

Kesepuluh rumus terakhir, persamaan (9) sampai dengan persamaan (18), dinamakan **rumus Napier** *)

Untuk mendapatkan rumus (15) :

$$\tan b \cot \beta = \frac{\sin b}{\cos b}\,\frac{\cos \beta}{\sin \beta} \qquad \ldots\ldots\ (19)$$

Dan dari (11), (13), maka (19) menjadi :

$$\frac{\sin \beta \sin c}{\cos \beta / \sin \alpha}\,\frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \sin \alpha \sin c \qquad \ldots\ldots\ (20)$$

Dari (10), (20) menjadi :

$$\sin \alpha \sin c = \sin a \qquad \ldots\ldots\ (21)$$

Penurunan rumus (16) :

$$\tan a \cot \alpha = \frac{\sin a}{\cos a}\,\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \qquad \ldots\ldots\ (22)$$

Dari (10) dan (12), (22) menjadi :

$$\frac{\sin \alpha \sin c}{\cos \alpha / \sin \beta}\,\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sin \beta \sin c \qquad \ldots\ldots\ (23)$$

Dan dari (11), (23) menjadi :

$$\sin \beta \sin c = \sin b \qquad \ldots\ldots\ (24)$$

Untuk penurunan rumus (17) dan (18) agar **dicoba sendiri !**

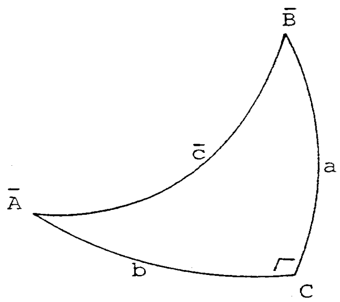
---

*) **Napier, John** (1550-1617); Matematikawan Skot, pencipta logaritma.

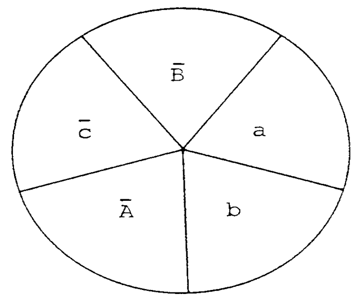
5.2. KAIDAH NAPIER

Kesepuluh rumus Napier dalam pasal **5.1.** bisa didapat dari **Kaidah Napier.**

Perhatikan gambar 21-a dan gambar 21-b berikut ini :



Gambar 21-a
Segitiga bola siku-siku di C



Gbr. 21-b
Lingkaran dibagi dalam 5 bagian

Gambar 21-a adalah gambar dari segitiga siku-siku, dengan sudut C = 90° (atau $\gamma = 90^{\circ}$). Huruf dengan garis di atasnya berarti komplemen. Jadi $\bar{A} = 90^{\circ} - A$, $\bar{c} = 90^{\circ} - c$ dan $\bar{B} = 90^{\circ} - B$.

Perhatikan bahwa huruf yang diberi garis adalah sisi yang di muka sudut siku-siku (**sisi miring**) dan kedua sudut sampingnya.

Gambar 21-b adalah gambar sebuah lingkaran yang dibagi dalam lima bagian. Tiap bagiaan diberi huruf dalam **urutan** yang sama seperti pada gambar 21-a.

Perhatikan bahwa pada gambar 21-b tidak terdapat huruf C , yaitu sudut siku-siku.
Tiap bagian dari lingkaran pada gambar 21-b dinamakan : **bagian.** Kedua bagian di samping suatu bagian dinamakan : **bagian samping.** Kedua lainnya dinamakan **bagian seberang.**

Kaidah Napier adalah sebagai berikut :

sinus suatu bagian = hasilkali **tan** bagian-bagian sampingnya.

sinus suatu bagian = hasilkali **cos** bagian-bagian seberangnya.

Kita terapkan Kaidah Napier pada lingkaran pada Gb. 21-b :

$$\sin a = \tan b \tan \bar{B} = \tan b \tan (90^{o} - B)$$
$$= \tan b \cot B = \tan b \cot \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sin a = \cos \bar{A} \cos \bar{C} = \cos (90^{o} - A) \cos (90^{o} - C)$$
$$= \sin A \sin c = \sin \alpha \sin c \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\sin b = \tan a \tan \bar{A} = \tan a \tan (90^{o} - A)$$
$$= \tan a \cot A = \tan a \cot \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\sin b = \cos \bar{c} \cos \bar{B} = \cos (90^{o} - c) \cos (90^{o} - B)$$
$$= \sin c \sin B = \sin c \sin \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\sin \bar{A} = \tan \bar{C} \tan b = \tan (90^{o} - c) \tan b =$$
$$= \cot c \tan b$$

atau :

$$\sin (90^{o} - A) = \cot c \tan b$$

Jadi :

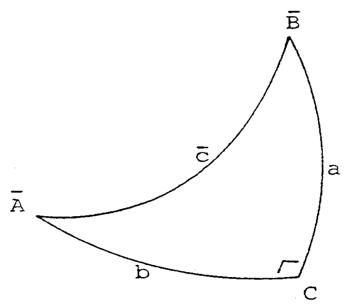
$$\cos \alpha = \cot c \tan b \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$
$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$
$$\cos c = \cos a \cos b \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$
$$\cos c = \cot \alpha \cot \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$
$$\cos \beta = \sin \alpha \cos b \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$
$$\cos \beta = \tan a \cot c \qquad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Kesepuluh rumus di atas adalah **rumus Napier.**

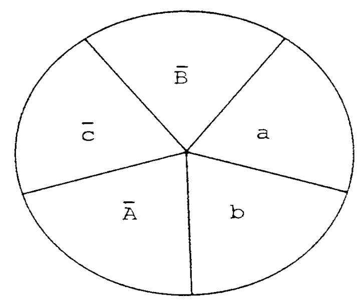
5.2. KAIDAH NAPIER

Kesepuluh rumus Napier dalam pasal **5.1.** bisa didapat dari **Kaidah Napier.**

Perhatikan gambar 21-a dan gambar 21-b berikut ini :



Gambar 21-a
Segitiga bola siku-siku di C



Gbr. 21-b
Lingkaran dibagi dalam 5 bagian

Gambar 21-a adalah gambar dari segitiga siku-siku, dengan sudut $C = 90^o$ (atau $\gamma = 90^o$). Huruf dengan garis di atasnya berarti komplemen. Jadi $\bar{A} = 90^o - A$, $\bar{c} = 90^o - c$ dan $\bar{B} = 90^o - B$.

Perhatikan bahwa huruf yang diberi garis adalah sisi yang di muka sudut siku-siku (**sisi miring**) dan kedua sudut sampingnya.

Gambar 21-b adalah gambar sebuah lingkaran yang dibagi dalam lima bagian. Tiap bagiaan diberi huruf dalam **urutan** yang sama seperti pada gambar 21-a.

Perhatikan bahwa pada gambar 21-b tidak terdapat huruf C , yaitu sudut siku-siku.

Tiap bagian dari lingkaran pada gambar 21-b dinamakan : **bagian.** Kedua bagian di samping suatu bagian dinamakan : **bagian samping.** Kedua lainnya dinamakan **bagian seberang.**

Kaidah Napier adalah sebagai berikut :

sinus suatu bagian = hasilkali **tan** bagian-bagian sampingnya.

sinus suatu bagian = hasilkali **cos** bagian-bagian seberangnya.

Kita terapkan Kaidah Napier pada lingkaran pada Gb. 21-b :

$$\sin a = \tan b \tan \bar{B} = \tan b \tan (90^\circ - B)$$
$$= \tan b \cot B = \tan b \cot \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sin a = \cos \bar{A} \cos \bar{C} = \cos (90^\circ - A) \cos (90^\circ - C)$$
$$= \sin A \sin c = \sin \alpha \sin c \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\sin b = \tan a \tan \bar{A} = \tan a \tan (90^\circ - A)$$
$$= \tan a \cot A = \tan a \cot \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\sin b = \cos \bar{c} \cos \bar{B} = \cos (90^\circ - c) \cos (90^\circ - B)$$
$$= \sin c \sin B = \sin c \sin \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\sin \bar{A} = \tan \bar{C} \tan b = \tan (90^\circ - c) \tan b =$$
$$= \cot c \tan b$$

atau :

$$\sin (90^\circ - A) = \cot c \tan b$$

Jadi :

$$\cos \alpha = \cot c \tan b \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$
$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$
$$\cos c = \cos a \cos b \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$
$$\cos c = \cot \alpha \cot \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$
$$\cos \beta = \sin \alpha \cos b \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$
$$\cos \beta = \tan a \cot c \qquad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Kesepuluh rumus di atas adalah **rumus Napier.**

5.3. SIFAT-SIFAT LAINNYA DARI SEGITIGA BOLA SIKU-SIKU

Dari rumus (6) dalam pasal 5.2. :

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Karena yang kita tinjau adalah segitiga bola dengan sisi dan sudut yang lebih kecil dari 180°, maka harga dari sin dari (1) di atas adalah selalu **positif.**
Berarti cos α dan cos a harus bertanda sama, berarti α dan a keduanya lancip atau keduanya tumpul.

Jadi : **Dalam segitiga bola siku-siku, sisi siku-siku dan sudut di mukanya selalu dalam kwadran yang sama.**

Dari rumus (7) dalam pasal 5.2. :

$$\cos c = \cos a \cos b \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Bila $c < 90^{\circ}$, maka $\cos a \cos b > 0$. Berarti a dan b pada kwadran yang sama (a dan b keduanya lancip, atau a dan b keduanya tumpul).

Bila $c > 90^{\circ}$, maka $\cos a \cos b < 0$. Berarti a dan b pada kwadran yang berlainan (a lancip, b tumpul atau a tumpul, b lancip).

Jadi : **Dalam segitiga bola siku-siku dengan sisi miring lancip, kedua sisi siku-sikunya dalam kwadran sama dan sebaliknya.**
Dalam segitiga bola siku-siku dengan sisi miring tumpul, kedua sisi siku-sikunya dalam kwadran yang berlainan dan sebaliknya.

Contoh :

1. Diberikan : $b = 60^{\circ}$, $c = 120^{\circ}$, $\gamma = 90^{\circ}$
   Tentukan : dalam kwadran berapa a, β dan α terletak?!

Kaidah Napier untuk bagian b :

$$\sin b = \tan a \cot \alpha$$

atau :

$$\cot \alpha = \sin b \cot a$$
$$\alpha = 80^\circ 25' 01''$$

Kaidah Napier untuk bagian c :

$$\cos c = \cos a \cos b$$
$$= 111^\circ 01' 00''$$

Soal-soal :

1. Untuk segitiga bola siku-siku di C, dengan unsur-unsur yang diberikan, tentukan pada kwadran berapa, unsur - unsur yang tidak diberikan terletak (yang dimaksud A , B atau C adalah α, β dan γ).

   (a). $a = 60^\circ$, $b = 120^\circ$ (b). $A = 80^\circ$, $c = 120^\circ$
   (c). $A = 70^\circ$, $B = 100^\circ$ (d). $a = 45^\circ$, $c = 135^\circ$
   (e). $a = 135^\circ$, $A = 120^\circ$ (f). $b = 140^\circ$, $c = 80^\circ$

   Jawaban :

   (a). c dalam kwadran II
   A dalam kwadran I
   B dalam kwadran II

   (b). a dalam kwadran I
   b dalam kwadran II
   B dalam kwadran II

   (c). a dalam kwadran I
   b dalam kwadran II
   c dalam kwadran II

   (d). b dalam kwadran II
   A dalam kwadran I
   B dalam kwadran II

   (e). A dalam kwadran II
   b dalam kwadran I
   c dalam kwadran II

   (f). a dalam kwadran II
   A dalam kwadran II
   B dalam kwadran II

2. Dari segitiga bola siku-siku di C, dengan unsur-unsur yang diberikan, tentukan unsur-unsur yang tidak dike-

tahui :

(a). $c = 69^{o}25'11''$, $A = 54^{o}54'42''$
(b). $c = 112^{o}48'00''$, $A = 56^{o}11'56''$

Jawaban :

(a). $a = 50^{o}$, $b = 56^{o}50'49''$, $B = 63^{o}25'04''$
(b). $a = 50^{o}$, $b = 127^{o}04'30''$, $B = 120^{o}03'50''$

3. Dari segitiga bola ABC siku-siku di A, dengan unsur-unsur yang diberikan, tentukan unsur-unsur yang tidak diketahui :
(a). $a = 46^{o}40'12''$, $B = 37^{o}46'09''$
(b). $a = 118^{o}40'01''$, $B = 128^{o}00'04''$

Jawaban :

(a). $b = 26^{o}27'24''$, $c = 39^{o}57'40''$, $C = 62^{o}00'05''$
(b). $b = 136^{o}15'28''$, $c = 48^{o}23'40''$, $C = 58^{o}27'00''$

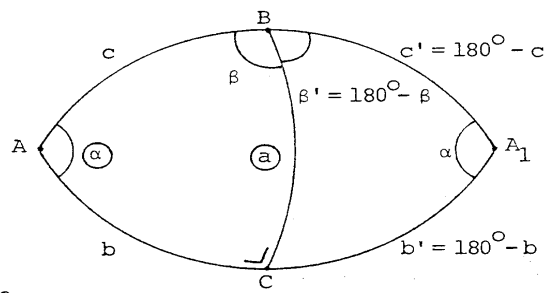
4. Dari segitiga bola siku-siku di B, diberikan :
$b = 58^{o}30'25''$, $C = 22^{o}00'55''$
Cari unsur-unsur lainnya !

Jawaban :

$c = 18^{o}38'29''$, $a = 56^{o}32'33''$, $A = 78^{o}04'23''$

5.4. KASUS DENGAN DUA JAWABAN

Bila dalam segitiga bola siku-siku diberikan sisi siku-siku dan sudut di mukanya (keduanya dalam kwadran yang sama), maka untuk tiap unsur yang tidak diberikan akan didapat dua jawaban.
Hal tersebut dapat dilihat dari gambar 22 sbb. :



Gambar 22

Dua segitiga bola siku-siku dengan dua sisi dan satu sudut yang saling berpelurus.

Bila diberikan a dan α, maka ada dua jawaban :

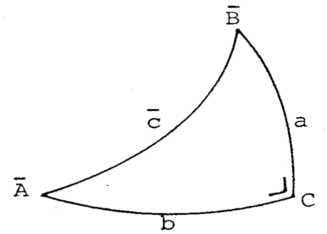
c dan $c' = 180^\circ - c$; β dan $\beta' = 180^\circ - \beta$;
b dan $b' = 180^\circ - b$

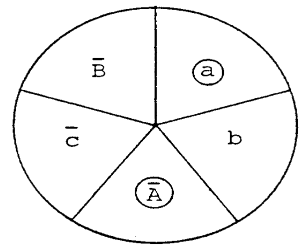
Contoh :

Dari segitiga bola ABC, diberikan $a = 46^\circ 45'$,
$\alpha = 59^\circ 12'$, $\gamma = 90^\circ$

Cari unsur-unsur lainnya !

Penyelesaian :





Kaidah Napier digunakan berturut-turut pada bagian a, α dan b :

$$\sin a = \sin \alpha \sin c$$

atau :

$$\sin c = \sin a \csc \alpha$$
$$\sin c = \sin 46^\circ 45' \csc 59^\circ 12'$$

Didapat dua harga c :

$$c = 58^\circ 00' \quad \text{dan} \quad c' = 180^\circ - c = 122^\circ 00'$$

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta$$

atau :

$$\sin \beta = \cos \alpha \sec a$$
$$\sin \beta = \cos 59^\circ 12' \sec 46^\circ 45'$$

Didapat :

$$\beta = 48^\circ 21' \quad \text{dan} \quad \beta' = 180^\circ - \beta = 131^\circ 39'$$

$$\sin b = \tan a \cot \alpha$$
$$\sin b = \tan 46^\circ 45' \cot 59^\circ 12'$$

Didapat b = $39^\circ 19'$ dan b' = $140^\circ 41'$

Soal-soal :

1. Dari segitiga bola siku-siku di A, diberikan :

   (a). $c = 21^\circ 39'00''$, $C = 42^\circ 10'10''$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   (b). $b = 77^\circ 21'50''$, $B = 83^\circ 56'40''$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   Jawaban :

   (a). $b = 25^\circ 59'28''$; $a = 33^\circ 20'13''$; $B = 52^\circ 53'00''$
   $b' = 154^\circ 00'32''$; $a' = 146^\circ 39'47''$; $B' = 127^\circ 07'00''$

   (b). $c = 28^\circ 14'31''$; $a = 78^\circ 53'20''$; $C = 28^\circ 49'57''$
   $c' = 151^\circ 45'29''$; $a' = 101^\circ 06'40''$; $C' = 151^\circ 10'03''$

2. Dari segitiga bola siku-siku di C, diberikan :

   (a). $a = 59^\circ 28'27''$, $A = 66^\circ 07'20''$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   (b). $a = 67^\circ 06'48''$, $A = 80^\circ 10'30''$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   Jawaban :

   (a). $c = 70^\circ 23'50''$; $b = 48^\circ 39'16''$; $B = 52^\circ 50'24''$
   $c' = 109^\circ 36'10''$; $b' = 131^\circ 20'44''$; $B' = 127^\circ 09'36''$

   (b). $c = 69^\circ 13'36''$; $b = 24^\circ 13'15''$; $B = 26^\circ 01'30''$
   $c' = 110^\circ 46'24''$; $b' = 155^\circ 46'45''$; $B' = 153^\circ 58'30''$

5.5. SEGITIGA BOLA SISI SIKU-SIKU

Segitiga bola dengan salah satu sisi sama dengan 90° dinamakan **segitiga bola sisi siku-siku.** Segitiga bola kutub dari segitiga bola sisi siku-siku adalah segitiga bola siku-siku. Jadi unsur-unsur segitiga bola sisi siku-siku bisa didapat melalui segitiga bola kutubnya.

Contoh :

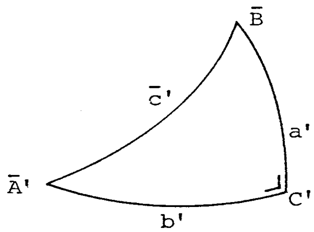
Tentukan unsur-unsur lainnya dari segitiga bola ABC, bila diberikan : $c = 90^\circ$, $A = 115^\circ 38'$ dan $b = 139^\circ 58'$.

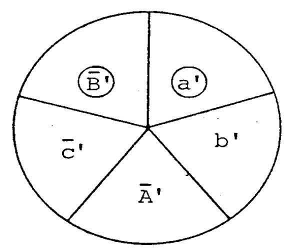
Penyelesaian :

Namakan segitiga bola kutubnya A'B'C'. Jadi :

$C' = 180^\circ - c = 90^\circ$

$a' = 180^\circ - A = 64^\circ 22'$ dan $B' = 180^\circ - b = 40^\circ 02'$





$\cos B' = \tan a' \cot c' \longrightarrow \cot c' = \cos B' \cot a'$

Didapat : $c' = 69^\circ 49'37''$ dan $C = 180^\circ - c' = 110^\circ 10'23''$

$\sin a' = \cot B' \tan b' \longrightarrow \tan b' = \sin a' \tan B'$

Didapat : $b' = 37^\circ 08'25''$ dan $B = 180^\circ - b' = 142^\circ 51'35''$

$\cos A' = \cos a' \sin B'$

Didapat : $A' = 73^\circ 50'34''$ dan $a = 180^\circ - A' = 106^\circ 09'26''$

Soal-soal :

1. Dari segitiga bola ABC, diberikan :

   $c = 90^{o}$, $a = 138^{o}04'$ dan $b = 109^{o}41'$

   Hitung unsur-unsur lainnya !

   Jawaban : $C = 113^{o}28'02"$, $A = 142^{o}11'42"$, $B = 120^{o}16'$

2. Dari segitiga bola ABC, diberikan :

   $b = 90^{o}$, $C = 131^{o}30'$ dan $A = 120^{o}32'$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   Jawaban : $B = 109^{o}40'20"$, $c = 127^{o}18'32"$, $a = 113^{o}50'03"$

3. Dari segitiga bola ABC, diberikan :

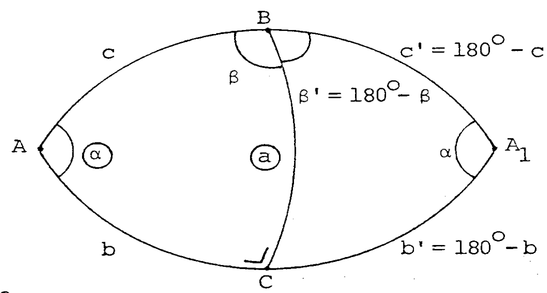
   $a = 90^{o}$, $b = 95^{o}18'20"$ dan $c = 159^{o}33'40"$

   Tentukan unsur-unsur lainnya !

   Jawaban : $A = 104^{o}25'45"$, $B = 105^{o}21'16"$, $C = 160^{o}13'48"$

5.4. KASUS DENGAN DUA JAWABAN

Bila dalam segitiga bola siku-siku diberikan sisi siku-siku dan sudut di mukanya (keduanya dalam kwadran yang sama), maka untuk tiap unsur yang tidak diberikan akan didapat dua jawaban.
Hal tersebut dapat dilihat dari gambar 22 sbb. :



Gambar 22

Dua segitiga bola siku-siku dengan dua sisi dan satu sudut yang saling berpelurus.

Bila diberikan a dan α, maka ada dua jawaban :

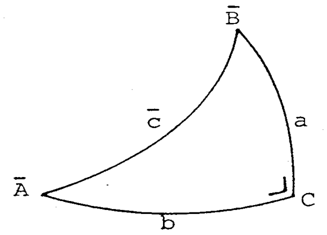
c dan $c' = 180^\circ - c$; β dan $\beta' = 180^\circ - \beta$;
b dan $b' = 180^\circ - b$

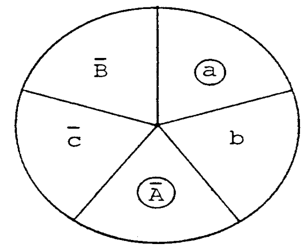
Contoh :

Dari segitiga bola ABC, diberikan $a = 46^\circ 45'$,
$\alpha = 59^\circ 12'$, $\gamma = 90^\circ$

Cari unsur-unsur lainnya !

Penyelesaian :





Kaidah Napier digunakan berturut-turut pada bagian a, α dan b :

$$\sin a = \sin \alpha \sin c$$

atau :

$$\sin c = \sin a \csc \alpha$$
$$\sin c = \sin 46^\circ 45' \csc 59^\circ 12'$$

Didapat dua harga c :

$$c = 58^\circ 00' \quad \text{dan} \quad c' = 180^\circ - c = 122^\circ 00'$$

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta$$

atau :

$$\sin \beta = \cos \alpha \sec a$$
$$\sin \beta = \cos 59^\circ 12' \sec 46^\circ 45'$$

Didapat :

$$\beta = 48^\circ 21' \quad \text{dan} \quad \beta' = 180^\circ - \beta = 131^\circ 39'$$

$$\sin b = \tan a \cot \alpha$$
$$\sin b = \tan 46^\circ 45' \cot 59^\circ 12'$$

Didapat $b = 39^\circ 19'$ dan $b' = 140^\circ 41'$

Soal-soal :

1. Dari segitiga bola siku-siku di A, diberikan :

   (a). $c = 21^{o}39'00"$, $C = 42^{o}10'10"$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   (b). $b = 77^{o}21'50"$, $B = 83^{o}56'40"$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   Jawaban :

   (a). $b = 25^{o}59'28"$; $a = 33^{o}20'13"$; $B = 52^{o}53'00"$

   $b' = 154^{o}00'32"$; $a' = 146^{o}39'47"$; $B' = 127^{o}07'00"$

   (b). $c = 28^{o}14'31"$; $a = 78^{o}53'20"$; $C = 28^{o}49'57"$

   $c' = 151^{o}45'29"$; $a' = 101^{o}06'40"$; $C' = 151^{o}10'03"$

2. Dari segitiga bola siku-siku di C, diberikan :

   (a). $a = 59^{o}28'27"$, $A = 66^{o}07'20"$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   (b). $a = 67^{o}06'48"$, $A = 80^{o}10'30"$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   Jawaban :

   (a). $c = 70^{o}23'50"$; $b = 48^{o}39'16"$; $B = 52^{o}50'24"$

   $c' = 109^{o}36'10"$; $b' = 131^{o}20'44"$; $B' = 127^{o}09'36"$

   (b). $c = 69^{o}13'36"$; $b = 24^{o}13'15"$; $B = 26^{o}01'30"$

   $c' = 110^{o}46'24"$; $b' = 155^{o}46'45"$; $B' = 153^{o}58'30"$

5.5. SEGITIGA BOLA SISI SIKU-SIKU

Segitiga bola dengan salah satu sisi sama dengan 90^{o} dinamakan **segitiga bola sisi siku-siku.** Segitiga bola kutub dari segitiga bola sisi siku-siku adalah segitiga bola siku-siku. Jadi unsur-unsur segitiga bola sisi siku-siku bisa didapat melalui segitiga bola kutubnya.

Contoh :

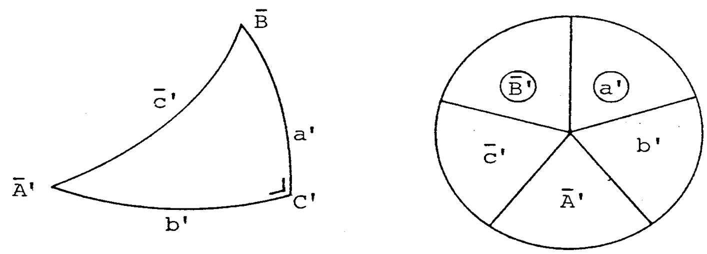
Tentukan unsur-unsur lainnya dari segitiga bola ABC, bila diberikan : $c = 90^{o}$, $A = 115^{o}38'$ dan $b = 139^{o}58'$.

Penyelesaian :

Namakan segitiga bola kutubnya A'B'C'. Jadi :

$C' = 180^{o} - c = 90^{o}$

$a' = 180^{o} - A = 64^{o}22'$ dan $B' = 180^{o} - b = 40^{o}02'$



$\cos B' = \tan a' \cot c' \longrightarrow \cot c' = \cos B' \cot a'$

Didapat : $c' = 69^{o}49'37"$ dan $C = 180^{o} - c' = 110^{o}10'23"$

$\sin a' = \cot B' \tan b' \longrightarrow \tan b' = \sin a' \tan B'$

Didapat : $b' = 37^{o}08'25"$ dan $B = 180^{o} - b' = 142^{o}51'35"$

$\cos A' = \cos a' \sin B'$

Didapat : $A' = 73^{o}50'34"$ dan $a = 180^{o} - A' = 106^{o}09'26"$

Soal-soal :

1. Dari segitiga bola ABC, diberikan :

   $c = 90^\circ$, $a = 138^\circ 04'$ dan $b = 109^\circ 41'$

   Hitung unsur-unsur lainnya !

   Jawaban : $C = 113^\circ 28'02''$, $A = 142^\circ 11'42''$, $B = 120^\circ 16'$

2. Dari segitiga bola ABC, diberikan :

   $b = 90^\circ$, $C = 131^\circ 30'$ dan $A = 120^\circ 32'$

   Cari unsur-unsur lainnya !

   Jawaban : $B = 109^\circ 40'20''$, $c = 127^\circ 18'32''$, $a = 113^\circ 50'03''$

3. Dari segitiga bola ABC, diberikan :

   $a = 90^\circ$, $b = 95^\circ 18'20''$ dan $c = 159^\circ 33'40''$

   Tentukan unsur-unsur lainnya !

   Jawaban : $A = 104^\circ 25'45''$, $B = 105^\circ 21'16''$, $C = 160^\circ 13'48''$

6. RUMUS PERBANDINGAN NAPIER

Dila dari suatu segitiga bola diberikan tiga unsurnya, maka pada umumnya ketiga unsur lainnya dapat dihitung. Dalam Bab **4** telah dibahas mengennai penggunaan rumus **cosinus** dalam pemecahan segitiga bola. Dalam bab tersebut dijelaskan, bahwa bila untuk suatu segitiga bola diberikan : s.sd.s. atau sd.s.sd. atau s.s.s. atau sd.sd.sd., maka dengan rumus **cosinus** unsur-unsur lainnya dapat dicari.

Di samping empat kasus di atas, masih ada lagi dua kasus, yaitu bila diberikan dua sisi dan satu sudut di muka salah satu sisi (s.s.sd.) dan dua sudut dan salah satu sisi dimuka salah satu sudut (sd.sd.s.). Untuk memecahkan kedua kasus terakhir ini diperlukan **Rumus Perbandingan Napier.**

6.1. PENURUNAN RUMUS PERBANDINGAN NAPIER

Dari rumus cosinus untuk sisi :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \qquad \text{......} (1)$$

atau :

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \qquad \text{......} (2)$$

Maka :

$$1 - \cos \alpha = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} \qquad \text{..} (3)$$

atau :

$$1 - (1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} \qquad \text{.....} (4)$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-2 \sin \tfrac{1}{2}(b - c + a) \sin \tfrac{1}{2}(b - c - a)}{\sin b \sin c} \qquad \text{.} (5)$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a + b - c) \sin \tfrac{1}{2}(a + c - b)}{\sin b \sin c} \qquad \text{.....} (6)$$

Namakan : $a + b + c = 2s$, maka : $\tfrac{1}{2}(a+b-c) = s - c$, dan
$\tfrac{1}{2}(a+c-b) = s - b$

Maka (6) menjadi :

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin (s - c) \sin (s - b)}{\sin b \sin c} \qquad \text{......} (7)$$

dan :

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin (s - c) \sin (s - b)}{\sin b \sin c}} \qquad \text{......} (8)$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$\sin \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - c)}{\sin a \sin c}} \qquad \text{......} (9)$$

Dari (2) :

$$1 + \cos \alpha = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} \qquad \text{..} (10)$$

atau :

$$1 + (2\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha - 1) = \frac{-\cos(b+c) + \cos a}{\sin b \sin c} \quad \ldots\ldots (11)$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-2\sin \tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin \tfrac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b \sin c} \quad \ldots\ldots (12)$$

atau :

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\ (a+b+c)\sin\ (b+c-a)}{\sin b \sin c} \quad \ldots\ldots (13)$$

Jadi :

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}} \quad \ldots\ldots (14)$$

Dengan penukaran siklis : a diganti b, b diganti c, c diganti a, α diganti β dan seterusnya, didapat :

$$\cos \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}} \quad \ldots\ldots (15)$$

Sekarang tinjau :

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta - \cos \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta}{\sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta + \cos \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta} \quad \ldots\ldots (16)$$

Substitusi (8), (9), (14), dan (15) dalam (16) :

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{\dfrac{\sin s \sin(s-c)\sin^2(s-b)}{\sin a \sin b \sin^2 c}}\;-}{\sqrt{\text{sama dengan di atas}}\;+} \\ \dfrac{\sqrt{\dfrac{\sin s \sin(s-c)\sin^2(s-a)}{\sin a \sin b \sin^2 c}}}{\sqrt{\text{sama dengan di atas}}} \end{array} \quad \ldots\ldots (17)$$

Yang dapat disederhanakan menjadi :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{\sin (s - b) - \sin (s - a)}{\sin (s - b) + \sin (s - a)} \quad .....(18)$$

atau :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cos (s - \frac{a+b}{2}) \sin (a - b)}{2 \sin (s - \frac{a+b}{2}) \cos (a - b)} \quad .... (19)$$

atau :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(a - b)} \quad .... (20)$$

Akhirnya didapat :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a - b)}{\tan \frac{1}{2}c} \quad .... (21)$$

Dengan penukaran siklis didapat :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(b - c)}{\tan \frac{1}{2}a} \quad .... (22)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \alpha)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(c - a)}{\tan \frac{1}{2}b} \quad .... (23)$$

Menerapkan (21), (22) dan (23) pada segitiga bola kutubnya didapat :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cot \frac{1}{2}\gamma} \quad .... (24)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(b - c)}{\sin \frac{1}{2}(b + c)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cot \frac{1}{2}\alpha} \quad .... (25)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(c - a)}{\sin \frac{1}{2}(c + a)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{\cot \frac{1}{2}\beta} \quad .... (26)$$

Keenam rumus terakhir ini dinamakan : **Rumus Perbandingan Napier.**

6.2. PENGGUNAAN RUMUS PERBANDINGAN NAPIER

Seperti halnya dalam segitiga datar, bila diberikan dua sisi dan satu sudut di muka salah satu sisi, maka ada kemungkinan didapat dua jawaban, demikian juga halnya dengan segitiga bola.
Untuk segitiga bola ada kemungkinan didapat dua jawaban, bila yang diberikan adalah s.s.sd. atau sd.sd.s. Untuk kedua kasus ini rumus-rumus yang digunakan adalah rumus sinus dan **rumus perbandingan Napier.**

Contoh :

Diberikan : a, b, α (s.s.sd.)
Cari : β, c, γ !

Penyelesaian :

Dari rumus sinus :

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \longrightarrow \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a} \sin \alpha$$

Karena $0^\circ < \beta < 180^\circ$, maka ada dua harga untuk β :

$$\beta_1 \text{ dan } \beta_2 = 180^\circ - \beta_1$$

Bila $a > b$ (benar tidaknya dapat diketahui, karena a dan b diberikan), maka $\alpha > \beta$

Bila kedua harga β memenuhi ketidaksamaan di atas, maka ada dua jawaban untuk β. Bila satu dari β yang memenuhi, maka hanya ada satu jawaban.

Untuk mendapatkan unsur-unsur sisanya, digunakan rumus **perbandiangan Napier.**

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a - b)}{\tan \frac{1}{2} c}$$

dan :

$$\tan \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \tan \tfrac{1}{2}(a - b)$$

Bila ada dua jawaban untuk β, maka ada dua jawaban p u l a untuk c, yaitu c_1 dan c_2. Didapat dari memasukkan bertu - rut-turut harga β_1, dan β_2 dalam persamaan terakhir.

Untuk mendapatkan γ digunakan rumus perbandingan Napier lainnya :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cot \frac{1}{2}\gamma}$$

dan :

$$\cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} \tan \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Ada dua jawaban untuk γ, bila ada dua jawaban untuk β.

Contoh :

Diberikan : α, β, a. (sd.sd.s.)

Cari : b, c, γ !

Penyelesaian :

Rumus sinus : $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b}$

atau :

$$\sin b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin a$$

Ada dua harga b yang memenuhi : b_1 dan $b_2 = 180^\circ - b_1$

Misalkan $\alpha > b$. Maka haruslah : $a > b$.

Bila b_1 dan b_2 memenuhi ketidaksamaan di atas, maka ada dua jawaban untuk b. Bila hanya satu b saja yang memenuhi maka hanya ada satu jawaban untuk b.

Rumus perbandingan Napier :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a - b)}{\tan \frac{1}{2} c}$$

c didapat dari :

$$\tan \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \tan \frac{1}{2}(a - b)$$

Ada satu atau dua harga c, tergantung dari harga b.

Gunakan rumus perbandingan Napier lainnya :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cot \frac{1}{2}\gamma}$$

atau :

$$\tan \frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \; \frac{1}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

Didapat γ. Ada satu atau dua jawaban untuk γ, tergantung dari b. Bila didapat dua jawaban untuk b, misalnya b_1 dan b_2, maka ada dua jawaban untuk γ, yaitu γ_1 dan γ_2.

Pertanyaan :

Coba sendiri dengan penyelesaian seperti di atas, bila yang diberikan adalah : a, b dan γ.

C o n t o h :

1. Diberikan : $a = 143°39'40"$, $b = 133°29'20"$ dan $\alpha = 137°44'40"$

   Hitung unsur-unsur lainnya !

   Penyelesaian :

   Rumus sinus : $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin a}$

   $$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a} \sin \alpha$$

Didapat :

$\beta_1 = 55^\circ24'02"$ dan $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 124^\circ34'58"$

Karena $a > b$, maka haruslah $\alpha > \beta$

Kedua harga β yang didapat lebih kecil dari α.

Jadi ada dua jawaban untuk β.

Rumus perbandingan Napier :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a - b)}{\tan \frac{1}{2}c} \quad \text{atau}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}c = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \tan \tfrac{1}{2}(a - b)$$

Untuk $\beta_1 = 55^\circ24'02"$ didapat $c_1 = 15^\circ18'15"$

Untuk $\beta_2 = 124^\circ34'58"$ didapat $c_2 = 60^\circ37'32"$

Rumus perbandingan Napier :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cot \frac{1}{2}\gamma} \quad \text{atau}$$

$$\cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} \tan \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Untuk $\beta_1 = 55^\circ24'02"$ didapat $\gamma_1 = 17^\circ25'33"$

Untuk $\beta_2 = 124^\circ34'58"$ didapat $\gamma_2 = 98^\circ32'34"$

2. Diberikan :

$\alpha = 110^{o}10'$, $\beta = 133^{o}18'$, $a = 147^{o}05'32"$

Cari unsur-unsur lainnya !

Penyelesaian :

Rumus sinus : $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ atau

$\sin b = \frac{\sin}{\sin} \sin a$

Didapat :

$b_1 = 24^{o}54'42"$ dan $b_2 = 180^{o} - b_1 = 155^{o}05'18"$

Karena $\alpha < \beta$, maka haruslah $a < b$. yang memenuhi harga $b = 155^{o}05'08"$

Rumus perbandingan Napier :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a - b)}{\tan \frac{1}{2} c} \quad \text{atau}$$

$$\tan \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \tan \frac{1}{2}(a - b)$$

Didapat : $c = 33^{o}01'35"$

Rumus perbandingan Napier :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cot \frac{1}{2}\gamma} \quad \text{atau}$$

$$\cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Didapat : $\gamma = 70^{o}20'40"$