Jurnal Sains & Matematika
Volume 16 Nomor 3, Juli 2008

ISSN: 0854-0675
Artikel Penelitian: 106-111

GEOMETRI BERHINGGA ATAS GF(P^N) UNTUK MEMBENTUK ORTHOGONAL SERIES DESIGNS

Bambang Irawanto,Anisah
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

ABSTRACT---*Galois Fields GF (p^n) where p^n is a number of elements with p being a prime and n being an integer is used in creating Euclidean Geometry EG (2, p^n), Projective Geometry PG (2, p^n). EG (2, p^n) can create a BIB design which always results in an Orthogonal Series 1 (OS1) with parameters* $v = s^2, b = s^2 + s, r = s + 1, k = s, \lambda = 1$ *and PG (2, p^n) can create a BIB design which always results in an Orthogonal Series 2 (OS2) with parameters* $v = b = s^2 + s + 1, r = k = s + 1, \lambda = 1$.

Keywords : Galois Field GF (p^n), Euclidean Geometry EG (2, p^n), Projective Geometry PG (2, p^n).

1. PENDAHULUAN

Lapangan berhingga atau Galois Field adalah lapangan dengan elemen-elemennya berhingga.Elemen-elemen dalam Galois Field dapat digunakan untuk mengkontruksi suatu geometri berhingga, yaitu geometri yang memiliki jumlah titik yang berhingga [4].

Rancangan Rangkaian Ortogonal merupakan salah satu Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang (RBTLS) dengan parameter-parameter $v = s^2$, $b = s^2 + s$, $r = s + 1$, $k = s$, $\lambda = 1$ yang dinamakan dengan Rangkaian Ortogonal 1 (*Orthogonal Series 1 (OS1)*) dan $v = b = s^2 + s + 1$, $r = k = s + 1$, $\lambda = 1$ yang dinamakan dengan Rangkaian Ortogonal 2 (*Orthogonal Series 2 (OS2)*).

Dalam membentuk suatu Rancangan Rangkaian Ortogonal (*Orthogonal Series*) salah satunya dapat menggunakan geometri berhingga yaitu lapangan berhingga (*Finite fields*) atau disebut juga lapangan galois (*Galois Fields*). Karena mempunyai manfaat yang cukup besar dalam aktifitas pendistribusian sejumlah objek maka untuk membentuk RBTLS dapat menggunakan banyak cara. Pada tulisan ini akan dibahas mengenai bagaimana cara membentuk Rancangan Rangkaian Ortogonal 1 dan 2 menggunakan konstruksi geometri berhingga atas *Galois Fields* GF(p^n).

2.GEOMETRI EUCLID DAN GEOMETRI PROYEKTIF

Geometri Euclid berhingga (*Finite Euclidean Geometry*) dua dimensi atas lapangan GFp^n dinotasikan dengan EG(2, p^n) dan didefinisikan sebagai Geometri berhingga yang mempunyai dua elemen yaitu titik dan garis, sebuah titik adalah pasangan (x, y), dimana $x \in$ GFp^n, $y \in$ GFp^n. Jumlah x dan y adalah koordinat-koordinat titik. Garis adalah himpunan titik-titik yang memenuhi persamaan linier

$$ax + by + c = 0, \quad (1)$$

dimana $a, b, c \in$ GFp^n dan $(a,b) \neq (0,0)$. Persamaan (1) kemudian dinamakan persamaan garis.Geometri berhingga EG (2, p^n) memiliki s^2 titik dan $s^2 + s$ garis dan $s = p^n$[2].Sifat lain pada geometri berhingga adalah ,setiap dua titik dari EG (2, p^n) dihubungkan oleh tepat satu garis.[3]

Teorema 1.[2]

Terdapat tepat s titik di masing-masing garis dari EG (2, p^n) dimana $s = p^n$.

Bukti :

Persamaan garis dapat ditulis sebagai

(i) $y = mx + \beta$ atausebagai

(ii) $x = \gamma$,

Dalam kasus (i), untuk masing-masing nilai x, terdapat tepat satu nilai y. Karena x dianggap sebagai s sehingga x adalah nilai-nilai s. Oleh karena itu terdapat tepat s titik pada garis. Sedangkan untuk kasus (ii), x mempunyai sebuah nilai tetap γ, tetapi γ dapat dipilih dalam

ISSN: 0854-0675
Artikel Penelitian: 106-111

s cara yang berbeda. Oleh karena itu terdapat s titik pada garis.

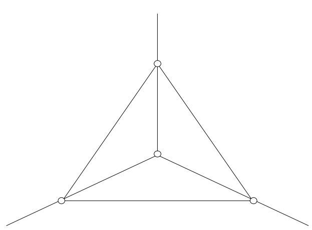
Dalam EG (2, p^n), $s^2 + s$ garis dapat dibagi menjadi $s + 1$ himpunan-himpunan yang masing-masing terdiri dari s garis sedemikian sehingga setiap dua garis dari himpunan yang sama adalah paralel satu sama lain. Masing-masing himpunan ini dinamakan *parallel pencil*.[2]

Pandang geometri berhingga EG(2,2) berdasarkan lapangan GF_2. Lapangan tersebut hanya terdiri dari dua elemen yaitu 0 dan 1. Geometri berhingga EG(2, p^n) mempunyai s^2 titik dan $s^2 + s$ garis, dimana $s = p^n$. Disini $s = 2$, sehingga EG(2,2) mempunyai 4 titik, yaitu :
(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)
Sedangkan jumlah garisnya adalah $s^2 + s = 6$ dan ditunjukkan dalam tabel berikut:

Tabel 1. Tabel garis-garis pada EG (2,2)

Persamaan Garis	**Titik-titik yang dihubungkan**
$y = 0$	**(0,0), (1,0)**
$y = 1$	**(0,1), (1,1)**
$y = x$	**(0,0), (1,1)**
y = $x + 1$	**(1,0), (0,1)**
$x = 0$	**(0,0), (0,1)**
$x = 1$	**(1,0), (1,1)**

Geometri berhingga dari EG(2,2) dapat disajikan



Gambar 1. EG (2,2)

Geometri Proyektif dinotasikan dengan PG (2, p^n) dan didefinisikan sebagai perluasan dari EG (2, p^n) dimana untuk setiap dua garis yang berbeda, berpotongan di sebuah titik yang berkorespondensi dengan masing-masing garis *parallel pencil* [2]. Titik baru ini disebut titik di tak hingga (*points at infinity*). Semua titik baru ini terdapat dalam sebuah garis yang disebut dengan garis di tak hingga (*line at infinity*). Berikut ini adalah sifat Geometri Proyektif,

Teorema 2. [2]

Geometri proyektif PG (2, p^n) mempunyai $s^2 + s + 1$ titik dan $s^2 + s + 1$ garis. Setiap garis mengandung $s + 1$ titik, dan setiap titik terdapat di $s + 1$ garis. Setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh satu garis yang unik dan setiap dua garis yang berbeda berpotongan di satu titik yang unik.

Bukti :

Terdapat s^2 titik dalam EG (2, p^n) dan $s + 1$ titik di tak hingga (*points at infinity*) (Teorema 1). Oleh karena itu, terdapatlah $s^2 + s + 1$ titik.

Terdapat $s^2 + s$ garis dan satu garis di tak hingga (*line at infinity*). Oleh karena itu, terdapatlah $s^2 + s + 1$ garis.

Untuk setiap $m \in GFp^n$, didapat sebuah *parallel pencil* (dari bentuk (i) (Teorema 1.)) dengan kemiringan m. Setiap garis dari *pencil* mempunyai persamaan $y = mx + \beta$, dimana m adalah sama untuk setiap garis dari *pencil* tetapi β berbeda untuk garis yang berbeda dari *pencil*. Titik di tak hingga berkorespondensi dengan *pencil* ini dan dikoordinatkan oleh (m). Juga terdapat sebuah *parallel pencil* dari bentuk (ii) (Teorema 1.) dengan kemiringan ∞. Titik yang berkorespondensi dikoordinatkan oleh (∞).

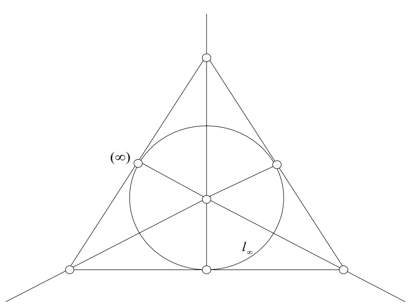
Garis di tak hingga dinotasikan oleh l_∞. l_∞ mengandung $s + 1$ titik di tak hingga. Setiap garis di dalam EG (2, p^n) mengandung s titik dan titik di tak hingga yang berkorespondensi dengan *pencil*. Maka garis $y = mx + \beta$ mengandung titik (m) di tak hingga dan garis $x = \gamma$ mengandung titik (∞). Jadi setiap garis dalam PG (2, p^n) mengandung $s + 1$ titik. Juga setiap titik di dalam EG (2, p^n) terkandung dalam $s + 1$ garis dalam EG (2, p^n) dimana satu titiknya terletak di satu *parallel pencil*. Sebuah titik di tak hingga terkandung di setiap s garis dari *parallel pencil* yang saling berkorespondensi dan juga terkandung di garis tak hingga. Jadi setiap titik terkandung di tepat $s+1$ garis.

Dua titik dalam EG (2, p^n) dihubungkan oleh sebuah garis. Titik di tak hingga terletak di l_∞. Misal sebuah titik P dalam EG (2, p^n) dan sebuah titik di tak hingga Q_∞. P terletak tepat di garis dimana Q_∞ berada. Garis yang menghubungkan P dan Q_∞ adalah garis yang unik.

Dua garis yang tidak paralel dalam EG (2, p^n) berpotongan di sebuah titik yang unik dalam EG (2, p^n). Dua garis yang paralel dalam EG (2, p^n) berpotongan di titik tak hingga yang berkorespondensi ke *parallel pencil* dimana kedua garis itu berada. Garis di tak hingga dan sebuah garis dalam EG (2, p^n) berpotongan di titik tak hingga yang berkorespondensi ke *parallel pencil* dimana garis dalam EG (2, p^n) berada. Maka, dua garis yang berbeda selalu berpotongan di sebuah titik yang unik.

Contoh 1

Geometri proyektif PG (2, 2) atas lapangan GF_2. Geometri proyektif PG (2, p^n) mempunyai s^2+s+1 titik dan s^2+s+1 garis, dimana $s=p^n$. Disini $s=2$, gambar Geometri proyektif PG (2, 2)



Gambar.2 PG(2,2)

sehingga PG (2, 2) mempunyai 7 titik, yaitu :
(0), (1), (∞), (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)
Sedangkan jumlah garisnya adalah $s^2+s+1=7$ dan ditunjukkan dalam tabel berikut:

Persamaan Garis	Titik-titik yang dihubungkan
$y=0$	(0,0), (1,0), (0)
$y=1$	(0,1), (1,1), (0)
$y=x$	(0,0), (1,1), (1)
$y=x+1$	(1,0), (0,1), (1)
$x=0$	(0,0), (0,1), (∞)
$x=1$	(1,0), (1,1), (∞)
l_∞	(0), (1), (∞)

Tabel .1 Jumlah garis dalam PG (2, 2)

3 RANCANGAN RANGKAIAN ORTOGONAL (*ORTHOGONAL SERIES DESIGNS*)

Dalam beberapa penyusunan obyek yang digunakan untuk merancang suatu percobaan ada beberapa rancangan-rancangan salah satunya adalah Rancangan Rangkaian Ortogonal (Orthogonal Series Designs). Rancangan ini sebenarnya merupakan bentuk khusus dari Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang

Suatu Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang dengan parameter-parameter (v, b, r, k, λ) didefinisikan sebagai suatu penyusunan terhadap v objek yang berbeda $a_1, \ldots, a_v$ ke dalam b blok $B_1, \ldots, B_b$ sedemikian sehingga,memiliki bentuk dimana setiap blok B_j memuat tepat k objek yang berbeda, setiap objek a_i muncul di dalam tepat r blok yang berbeda dan setiap pasangan tak terurut a_i, a_j dari objek-objek yang berbeda, muncul bersama dalam tepat λ blok , dimana

v = Banyaknya objek yang akan dibagi ke dalam blok-blok $B_1, \ldots, B_b$,
b = Banyaknya blok yang akan dihasilkan,
r = Banyaknya blok yang memuat objek a_i,
k = Banyaknya objek dalam satu blok,
λ= Banyaknya blok yang memuat pasangan tak terurut a_1, a_j dari objek-objek yang berbeda.

Dengan parameter-parameter v, b, r, k, λ dari Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang (RBTLS) memenuhi hubungan $bk = vr$, $\lambda(v-1) = r(k-1)$ [2] Seperti pada teorema berikut ini

ISSN: 0854-0675
Artikel Penelitian: 106-111

Teorema 3[2]

Parameter-parameter v, b, r, k, λ dari RBTLS memenuhi hubungan $bk = vr$, $\lambda(v-1) = r(k-1)$

Bukti :

Karena masing-masing blok mengandung *k* objek, jumlah objek yang terjadi di *b* blok adalah *bk*. Jumlah ini juga *vr* karena setiap *v* objek terjadi di *r* blok. Oleh karena itu $bk = vr$.

Terdapat *r* blok yang berbeda dimana sebuah objek θ muncul. Masing-masing blok mengandung $k - 1$ dari sisa $v - 1$ objek. Oleh karena itu jumlah objek yang lain dari θ muncul di blok ini adalah $r(k-1)$. Tetapi jumlah ini juga $\lambda(v-1)$ karena setiap $v-1$ objek harus muncul di λ blok. Jadi $\lambda(v-1) = r(k-1)$.

Akibatnya $r = \dfrac{\lambda(v-1)}{k-1}$, $b = \dfrac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)}$ merupakan bilangan bulat dan asli.

Karena banyaknya blok *b* tidak mungkin bilangan tak tercacah (*uncountable*) sehingga *r* pun harus bilangan bulat dan asli.

Suatu Rancangan Rangkaian Ortogonal dapat dibentuk secara langsung dari EG(2, p^n), PG(2, p^n).

Definisi 1

RBTLS dengan parameter-parameter $v = s^2, b = s^2 + s, r = s + 1, k = s, \lambda = 1$ disebut Rangkaian Ortogonal 1 (*Orthogonal series 1*)dinotasikan *OS1* dimana *s* prima atau pangkat prima.

Teorema 4

EG (2, p^n) dapat membentuk RBTLS yang selalu menghasilkan *OS*1.

Bukti :

Karena EG (2, p^n) mempunyai s^2 titik dan $s^2 + s$ garis yang berarti bahwa EG (2, p^n) mempunyai s^2 objek dan $s^2 + s$ persamaan garis yang mengandung objek-objek dalam garis tersebut yang akan membentuk blok-blok. Hal ini berkorespondensi dengan parameter *v* dan *b* dari *OS*1 dimana $v = s^2, b = s^2 + s$. Karena *OS*1 merupakan sebuah RBTLS maka parameter-parameternya pun harus memenuhi persamaan dalam teorema 4.sebagai berikut

$bk = vr, \lambda(v-1) = r(k-1)$

Sehingga

$$b = \frac{vr}{k}$$

$$s^2 + s = s^2 \frac{r}{k}$$

$$s(s+1) = s^2 \frac{r}{k}$$

$$\frac{r}{k} = \frac{(s+1)}{s}$$

Atau

$$\lambda(v-1) = r(k-1)$$

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{(v-1)}$$

$$1 = \frac{r(k-1)}{s^2 - 1}$$

$$r(k-1) = s^2 - 1$$

$$r(k-1) = (s+1)(s-1)$$

Diperoleh $r = (s+1)$ dan $k = s$.

Contoh 2

Membentuk *OS*1 dengan parameter $v = 4, b = 6, r = 3, k = 2, \lambda = 1$. Geometri berhingga EG (2, 2) atas lapangan GF_2 terdiri dari dua elemen yaitu 0 dan 1. Disini $s = 2$ sehingga jumlah titiknya ada $s^2 = 4$ titik dan dapat diidentifikasikan objek-objeknya yaitu :

Titik-titik dari EG (2,2)	*Objek*
(0, 0)	1
(0, 1)	2
(1, 0)	3
(1, 1)	4

Tabel 2.objek-objek dalam EG (2, 2)

Jumlah garisnya adalah $s^2 + s = 6$

Persamaan Garis	*Titik-titik dihubungkan*
$y = 0$	(0,0), (1,0)
$y = 1$	(0,1), (1,1)
$y = x$	(0,0), (1,1)
$y = x + 1$	(1,0), (0,1)
$x = 0$	(0,0), (0,1)
$x = 1$	(1,0), (1,1)

Tabel 3. Jumlah garis EG (2, 2)

ISSN: 0854-0675
Artikel Penelitian: 106-111

Blok	*Objek dalam setiap blok*
1	(1, 3)
2	(2, 4)
3	(1, 4)
4	(3, 2)
5	(1, 2)
6	(3, 4)

Tabel 4. Rancangan blok OS1

Definisi 2

RBTLS dengan parameter-parameter $v = b = s^2 + s + 1, r = k = s + 1, \lambda = 1$ disebut Rangkaian Ortogonal 2 (*Orthogonal series 2* atau *OS2*) dimana *s* prima atau pangkat prima.

Teorema 5

PG (2, p^n) dapat membentuk RBTLS yang selalu menghasilkan *OS*2.

Bukti :

Karena PG (2, p^n) mempunyai $s^2 + s + 1$ titik dan garis yang berarti bahwa PG (2, p^n) mempunyai $s^2 + s + 1$ objek dan persamaan garis yang mengandung objek-objek dalam garis tersebut yang akan membentuk blok-blok. Hal ini berkorespondensi dengan parameter *v* dan *b* dari *OS*2 dimana $v = b = s^2 + s + 1$. Karena banyaknya blok yang memuat pasangan tak terurut a_1, a_j dari objek-objek yang berbeda (λ) pada *OS*2 adalah 1 maka dari persamaan teorema 4 kita dapatkan

$$\lambda(v-1) = r(k-1)$$
$$\lambda = \frac{r(k-1)}{(v-1)}$$
$$1 = \frac{r(k-1)}{s^2 + s + 1 - 1}$$
$$r(k-1) = s^2 + s$$
$$r(k-1) = s(s+1)$$
$$r(k-1) = (s+1)s$$
$$r(k-1) = (s+1)(s+1-1)$$

Sehingga diperoleh $r = k = (s + 1)$.

Contoh 3

Membentuk *OS*2 dengan parameter $v = 7, b = 7, r = 3, k = 3, \lambda = 1$ .Geometri proyektif PG (2, 2) atas lapangan GF_2. Geometri proyektif PG (2, p^n) mempunyai $s^2 + s + 1$ titik dan $s^2 + s + 1$ garis, dimana $s = p^n$. Disini $s = 2$, sehingga PG (2, 2) mempunyai 7 titik dan dapat diidentifikasikan objek-objeknya yaitu :

Titik-titik dari PG (2,2)	*Objek*
(0, 0)	1
(0, 1)	2
(1, 0)	3
(1, 1)	4
(0)	5
(1)	6
(∞)	7

Tabel 5. objek-objek PG (2, 2)

Sedangkan jumlah garisnya adalah $s^2 + s + 1 = 7$ sebagai berikut:

Persamaan Garis	*Titik-titik yang dihubungkan*
$y = 0$	(0,0), (1,0), (0)
$y = 1$	(0,1), (1,1), (0)
$y = x$	(0,0), (1,1), (1)
$y = x + 1$	(1,0), (0,1), (1)
$x = 0$	(0,0), (0,1), (∞)
$x = 1$	(1,0), (1,1), (∞)
l_∞	(0), (1), (∞)

Tabel 6. Jumlah garis PG (2, 2)

Dari tabel 6. dapat dibuat rancangan blok-bloknya yaitu :

Blok	*Objek dalam setiap blok*
1	(1, 3, 5)
2	(2, 4, 5)
3	(1, 4, 6)
4	(3, 2, 6)
5	(1, 2, 7)
6	(3, 4, 7)
7	(5, 6, 7)

Tabel 7. Rancangan blok OS2

ISSN: 0854-0675
Artikel Penelitian: 106-111

4. KESIMPULAN

Lapangan Hingga dengan elemen p dapat digunakan untuk membentuk Geometri Euclid dan Proyektif Geometri. Dari geometri Euclid dapat membentuk RBTLS yang selalu menghasilkan *OS*1 dan Proyektif Geometri dapat membentuk RBTLS yang selalu menghasilkan *OS*2.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1].Bhattacarya,P.B,Jain,SR.Nagpaul,Basic Abstract Algebra,Cambrige University Press,USA, 1994

[2] Bose R. C. & Manvel, B, *Introduction to Combinatorial Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[3]. Marshall Hall, Jr, *Combinatorial Theory*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, USA. P, 1986

[4]Raisinghania,M.D,Aggarwal,R.S,Modern Algebra, S Chand & Company Ltd,New Delhi, 1980