PROGRAM STUDI

S1 SISTEM KOMPUTER

UNIVERSITAS DIPONEGORO

Program Dinamis

(Bagian 2)

Oky Dwi Nurhayati, ST, MT

email: okydn@undip.ac.id

Travelling Salesperson Problem (TSP)

- Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf lengkap berarah dengan sisi-sisi yang diberi harga $c_{ij} > 0$.

- Misalkan $|V| = n$ dan $n > 1$. Setiap simpul diberi nomor 1, 2, …, n.

- Asumsikan perjalanan (tur) dimulai dan berakhir pada simpul 1.

- Setiap tur pasti terdiri dari sisi $(1, k)$ untuk beberapa $k \in V - \{1\}$ dan sebuah lintasan dari simpul k ke simpul 1.

- Lintasan dari simpul k ke simpul 1 tersebut melalui setiap simpul di dalam $V - \{1, k\}$ tepat hanya sekali.

- Prinsip Optimalitas: jika tur tersebut optimal maka lintasan dari simpul k ke simpul 1 juga menjadi lintasan k ke 1 terpendek yang melalui simpul-simpul di dalam $V - \{1, k\}$.

- Misalkan $f(i, S)$ adalah bobot lintasan terpendek yang berawal pada simpul i, yang melalui semua simpul di dalam S dan berakhir pada simpul 1.

- Nilai $f(1, V - \{1\})$ adalah bobot tur terpendek.

Hubungan rekursif:

$$f(1, V - \{1\}) = \min_{2 \le k \le n}\{c_{1k} + f(k, V - \{1, k\})\} \quad (1)$$

Dengan merampatkan persamaan (1), diperoleh

$$f(i, \emptyset) = c_{i,1} \;, \; 2 \le i \le n \quad \text{(basis)}$$

$$f(i, S) = \min_{j \in S}\{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\} \quad \text{(rekurens)} \;\; (2)$$

- Gunakan persamaan (2) untuk memperoleh $f(i, S)$ untuk $|S| = 1$, $f(i, S)$ untuk $|S| = 2$, dan seterusnya sampai untuk $|S| = n - 1$.

Tinjau persoalan TSP untuk n = 4:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahap 1: $f(i, \emptyset) = c_{i,1} \quad , \; 2 \le i \le n$

Diperoleh:

$f(2, \emptyset) = c_{21} = 5;$
$f(3, \emptyset) = c_{31} = 6;$
$f(4, \emptyset) = c_{41} = 8;$

Tahap 2:

$$f(i, S) = \min_{j \in S}\{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\} \quad \text{untuk } |S| = 1$$

Diperoleh:

$f(2, \{3\}) = \min\{c_{23} + f(3, \emptyset)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$

$f(3, \{2\}) = \min\{c_{32} + f(2, \emptyset)\} = \min\{13 + 5\} = \min\{18\} = 18$

$f(4, \{2\}) = \min\{c_{42} + f(2, \emptyset)\} = \min\{8 + 5\} = \min\{13\} = 13$

$f(2, \{4\}) = \min\{c_{24} + f(4, \emptyset)\} = \min\{10 + 8\} = \min\{18\} = 18$

$f(3, \{4\}) = \min\{c_{34} + f(4, \emptyset)\} = \min\{12 + 8\} = \min\{20\} = 20$

$f(4, \{3\}) = \min\{c_{43} + f(3, \emptyset)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$

Tahap 3:

$$f(i, S) = \min_{j \in S}\{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\}$$

untuk $|S| = 2$ dan $i \neq 1$, $1 \notin S$ dan $i \notin S$.

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
f(2, \{3, 4\}) &= \min\{c_{23} + f(3, \{4\}), c_{24} + f(4, \{3\})\} \\
&= \min\{9 + 20, 10 + 15\} \\
&= \min\{29, 25\} \quad = 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(3, \{2, 4\}) &= \min\{c_{32} + f(2, \{4\}), c_{34} + f(4, \{2\})\} \\
&= \min\{13 + 18, 12 + 13\} \\
&= \min\{31, 25\} \quad = 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(4, \{2, 3\}) &= \min\{c_{42} + f(2, \{3\}), c_{43} + f(3, \{2\})\} \\
&= \min\{8 + 15, 9 + 18\} \\
&= \min\{23, 27\} = 23
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
f(1, \{2, 3, 4\}) &= \min\{c_{12} + f(2, \{3, 4\}), c_{13} + f(3, \{2, 4\}), \\
&\qquad c_{14} + f(4, \{2, 3\})\} \\
&= \min\{10 + 25, 15 + 25, 20 + 23\} \\
&= \min\{35, 40, 43\} = 35
\end{aligned}
$$

Jadi, bobot tur yang berawal dan berakhir di simpul 1 adalah 35.

- Misalkan $J(i, S)$ adalah nilai yang dimaksudkan tersebut. Maka, $J(1, \{2, 3, 4\}) = 2$. Jadi, tur mulai dari simpul 1 selanjutnya ke simpul 2.
- Simpul berikutnya dapat diperoleh dari $f(2, \{3, 4\})$, yang mana $J(2, \{3, 4\}) = 4$. Jadi, simpul berikutnya adalah simpul 4.
- Simpul terakhir dapat diperoleh dari $f(4, \{3\})$, yang mana $J(4, \{3\}) = 3$. Jadi, tur yang optimal adalah 1, 2, 4, 3, 1 dengan bobot (panjang) = 35.