

## PENENTUAN SUATU PENGONTROL DENGAN INDEKS PERFORMANSI BERUPA NORMA CAMPURAN $H_2$ DAN $H_\infty$

Robertus Heri Soelistyo  
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP  
Jl. Prof. Soedarto, Tembalang Semarang.

**Abstract.** This paper considers the mix-norm  $H_2/H_\infty$  standard problem. Specifically an LQG control design problem involving a constraint on  $H_\infty$  disturbance attenuation is addressed. It is shown that the  $H_2/H_\infty$  dynamic compensator gains are completely characterized via coupled Riccati/Lyapunov equation. The principle result involves a sufficient condition for characterizing full order guaranteeing closed loop stability, a constrained  $H_\infty$  disturbance attenuation and an optimized  $H_2$  performance bound.

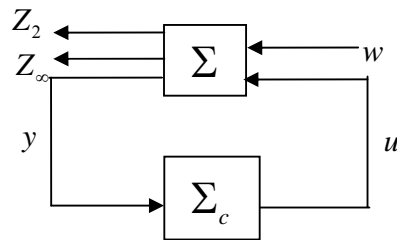
**Keywords:** mixed-norm  $H_2/H_\infty$ , closed loop stability,  $H_\infty$  disturbance attenuation, an optimized  $H_2$  performance bound.

### 1. PENDAHULUAN

Sistem kontrol berumpan balik (*feedback control sistem*) adalah sistem kontrol yang menjaga hubungan antara masukan dan keluaran dan membandingkannya dengan menggunakan selisihnya sebagai alat pengontrolan. Sedangkan sistem kontrol lup tertutup merupakan sistem kontrol yang sinyal keluarannya berpengaruh langsung pada aksi pengontrolan. Jadi sistem kontrol lup tertutup termasuk sistem kontrol berumpan balik. Dalam sistem kontrol lup tertutup, fungsi pengontrol sangatlah penting untuk memperkecil kesalahan dan membuat agar keluaran sistem mendekati harga yang diinginkan.

Salah satu cara untuk mencari pengontrol adalah dengan teori kontrol campuran  $H_2/H_\infty$ . Latar belakang yang mendasari kontrol campuran  $H_2/H_\infty$ , adalah adanya dua persoalan utama dalam desain sistem kontrol. Pertama optimisasi performansi yang diinginkan. Kedua, penting untuk disadari bahwa model selalu menyatakan suatu nominal sistem sementara sistem yang sebenarnya merupa-

kan subyek ketidakpastian. Untuk keperluan itulah, kedua aspek ini harus diakomodasi dalam desain sistem kontrol yang sama yaitu sistem kontrol campuran  $H_2/H_\infty$ , yang terdiri dari optimisasi norma  $H_2$  dari suatu fungsi alih lup tertutup, sementara norma  $H_\infty$  dari fungsi alih yang lain dipaksa untuk kurang dari suatu konstanta yang telah ditentukan. Situasi tersebut dapat digambarkan seperti Gambar 1.



Gambar 1. Desain kontrol campuran  $H_2/H_\infty$

Dimana  $\Sigma$  adalah sistem *time invariant* dan  $\Sigma_c$  merupakan pengontrolnya. Masa-

lah optimal campuran  $H_2/H_\infty$  adalah mencari pengontrol  $\Sigma_c$  sedemikian sehingga untuk  $\gamma > 0$

$$\min \left\{ \|T_{zw}\|_2^2 : \|T_{zw}\|_\infty < \gamma \right\}$$

## 2. PERMASALAHAN

Misalkan diketahui plant  $P(s)$  order  $n$  yang *stabilizable* dan *detectable*, dengan model dinamik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D_1w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + D_2w(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Masalah teori kontrol LQG dengan kendala  $H_\infty$  adalah menentukan pengontrol order  $n$

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t), \\ u(t) &= C_c x_c(t), \end{aligned}$$

yang memenuhi syarat:

- i. Sistem lup tertutup dari model (2.1) dinamik stabil asimtotik.
- ii. fungsi alih *nonstrictly proper*  $q_\infty \times d$

$$H(s) = \tilde{E}_\infty (sI_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{D} + E_\infty$$

dari  $w(t)$  ke

$$z_\infty(t) = E_{1\infty}x(t) + E_{2\infty}u(t) + E_\infty w(t)$$

memenuhi kendala

$$\|H(s)\|_\infty \leq \gamma, \gamma > 0.$$

- iii. Performansifungsional

$$J(A_c, B_c, C_c) = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left\{ x^T(t) R_1 x(t) \right.$$

$$\left. + 2x^T(t) R_{12} u(t) + u^T(t) R_2 u(t) \right\}$$

adalah minimal.

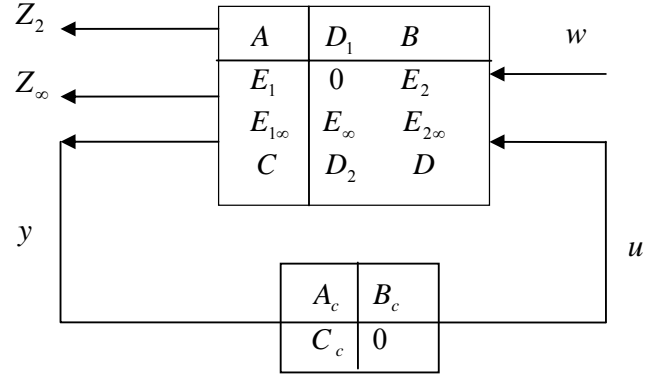
## 3. PENENTUAN SUATU PENGONTROL DENGAN INDEKS PERFORMANSI BERUPA NORMA CAMPURAN $H_2$ DAN $H_\infty$

### 3.1. Teori Kontrol LQG dengan kendala Pelemahan Gangguan $H_\infty$

Dalam sub bab ini dibahas teori kontrol LQG dengan kendala pelemahan gangguan  $H_\infty$ . Tanpa criteria performansi  $H_2$ , masalah yang dibahas di sini adalah masalah kontrol baku  $H_\infty$  [3,4,5]. Keselu-

ruhan tulisan ini membahas pengontrol berdimensi  $n$  dan lup tertutup berdimensi  $\tilde{n} = 2n$ .

Perhatikan blok diagram masalah baku campuran  $H_2/H_\infty$  seperti Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Lup Tertutup masalah baku norma campuran  $H_2/H_\infty$

Misalkan diketahui plant  $P(s)$  order  $n$  yang *stabilizable* dan *detectable* dengan model dinamik sebagai berikut.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_1w(t), \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_2w(t), \quad (3.2)$$

dimana:

$w$  : input sebagai disturbance.

$u$  : input dari pengontrol.

$z_2$  : output dari plant untuk kasus  $H_2$ .

$z_\infty$  : output dari plant untuk kasus  $H_\infty$ .

$y$  : input pengontrol/output yang terukur.

Permasalahan teori kontrol LQG dengan kendala  $H_\infty$  adalah menentukan pengontrol order  $n$ :

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \quad (3.3)$$

$$u(t) = C_c x_c(t), \quad (3.4)$$

$$K = \left[ \begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & 0 \end{array} \right],$$

yang memenuhi syarat:

- i. sistem lup tertutup dari model (2.1) dinamik stabil asimtotik. (3.5)

- ii. fungsi alih *nonstrictly proper*  $q_\infty \times d$

$$H(s) = \tilde{E}_\infty (sI_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{D} + E_\infty$$

dari  $w(t)$  ke

$$z_\infty(t) = E_{1\infty}x(t) + E_{2\infty}u(t) + E_\infty w(t)$$

memenuhi kendala  $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma, \gamma > 0$ .

$$(3.6)$$

iii. performansi fungsional

$$J(A_c, B_c, C_c) = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left\{ x^T(t) R_1 x(t) + 2x^T(t) R_{12} u(t) + u^T(t) R_2 u(t) \right\}$$

adalah minimal. (3.7)

Sebelum menemukan pengontrol yang memenuhi syarat (3.5)-(3.7), dibahas terlebih dulu beberapa hal sebagai berikut.

Substitusikan (3.4) ke (3.1) dan (3.2) dihasilkan persamaan:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{D}w(t) \\ y(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + D_2 w(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Kemudian performansi fungsional (3.7) menjadi

$$J(A_c, B_c, C_c) = \text{tr} \tilde{Q} \tilde{R}, \quad (3.9)$$

$$\text{dengan } \tilde{Q} \cong \lim_{t \rightarrow \infty} E [\tilde{x}(t) \tilde{x}^T(t)], \quad (3.10)$$

memenuhi persamaan aljabar Lyapunov  $\tilde{n} \times \tilde{n}$

$$\tilde{A}\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A} + \tilde{V} = 0. \quad (3.11)$$

Fungsi alih lup tertutup dari  $w(t)$  ke  $z_2(t) = E_1 x(t) + E_2 u(t)$  adalah:

$$\tilde{H}(s) = \frac{z_2(s)}{w(s)} = \tilde{E}(sI_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{D}. \quad (3.12)$$

Menurut [8], pengontrol (3.3) dan (3.4) *admissible* (diperkenankan) di  $H_2$  sehingga

$$J(A_c, B_c, C_c) = \|\tilde{H}(s)\|_2^2. \quad (3.13)$$

Dari uraian di atas ternyata performansi fungsional (3.7) identik dengan fungsi alih dari  $w(t)$  ke  $z_2(t)$ , sehingga masalah kontrol LQG dengan kendala  $H_\infty$  identik dengan masalah campuran  $H_2/H_\infty$ . Artinya, ketika meminimalkan performansi (3.7) sama dengan meminimalkan fungsi alih (3.12)

Langkah pertama untuk menyelesaikan masalah kontrol LQG dengan kendala  $H_\infty$  adalah melemahkan gangguan  $H_\infty$ .

Pelemahan gangguan  $H_\infty$  ( *$H_\infty$  disturbance attenuation*) ini dilakukan dengan mengganti persamaan aljabar Liapunov dengan persamaan aljabar Riccati, seperti dinyatakan dalam Lemma 1.

**Lemma 1.** Misalkan diberikan  $(A_c, B_c, C_c)$  dan asumsikan terdapat

$$\theta \in \mathfrak{R}^{n \times n} \text{ yang memenuhi } \theta \in \mathbb{N}^n \text{ dan } \tilde{A}\theta + \theta\tilde{A}^T + \gamma^{-2}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)^T + \tilde{V} = 0 \quad (3.14)$$

dengan  $\mathbb{N}^n$  adalah matriks simetris  $\tilde{n} \times \tilde{n}$  yang definit non negative.

Maka  $(\tilde{A}, \tilde{D})$  *stabilizable* jika dan hanya jika  $\tilde{A}$  stabil asimtotik.

Dalam kasus ini

$$\|H(s)\| \leq \gamma \text{ dan } \tilde{Q} \leq \theta. \quad (3.15) \quad (3.16)$$

$$\text{Sehingga } J(A_c, B_c, C_c) = \mathfrak{I}(A_c, B_c, C_c, \theta), \quad (3.17)$$

$$\text{dimana } \mathfrak{I}(A_c, B_c, C_c, \theta) \cong \text{tr} \tilde{\theta} \tilde{R}. \quad (3.18)$$

**Bukti.**

( $\Rightarrow$ ) Dari sistem lup tertutup (3.1)-(3.4) diketahui bahwa  $(\tilde{A}, \tilde{D})$  *stabilizable* dan  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  *detectable*. Hal ini mengakibatkan  $\tilde{A}$  stabil asimtotik.

( $\Leftarrow$ ) Karena  $\tilde{A}$  stabil asimtotik, maka  $(\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{C}, D_2)$  stabil asimtotik. Sehingga  $(\tilde{A}, \tilde{D})$  *stabilizable*. Untuk membuktikan

$$(3.15), \tilde{V} \text{ diganti dengan } \tilde{D}\tilde{D}^T \text{ dimana } \tilde{V} = \begin{bmatrix} V_1 & V_{12}B_c^T \\ B_c V_{12}^T & B_c V_2 B_c^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ B_c D_2 \end{bmatrix},$$

$V_1 = D_1 D_1^T, V_2 = D_2 D_2^T, V_{12} = D_1 D_2^T$ , dan mengurangi serta menambahkan  $j\omega I_n \theta$  ke (3.14) sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \tilde{D}\tilde{D}^T &= (-\tilde{A} + j\omega I_n)\theta \\ &+ \theta(-\tilde{A} - j\omega I_n) - \gamma^{-2}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)^T. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Mengalikan kedua ruas (3.19) dengan  $\tilde{E}_\infty(j\omega I_n - \tilde{A})^{-1}$  dari kiri dan  $(j\omega I_n - \tilde{A})^{-1} \tilde{E}_\infty^T$  dari kanan diperoleh:

$$\begin{aligned} & \tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{D} \tilde{D}^T (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T} \tilde{E}_\infty^T \\ &= \tilde{E}_\infty \theta (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{E}_\infty (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T \\ & - \gamma^{-2} \tilde{E}_\infty (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} (\tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T) M^{-1} (\tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T)^T (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T} \tilde{E}_\infty^T \end{aligned} \quad (3.20)$$

Kemudian dengan menjumlahkan kedua ruas (3.20) dengan

$$\tilde{E}_\infty (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + E_\infty \tilde{D}^T (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T} \tilde{E}_\infty^T + E_\infty E_\infty^T$$

diperoleh

Untuk memenuhi syarat ketiga dari masalah kendali LQG dengan kendala  $H_\infty$ ,

$$\begin{aligned} & \tilde{E}_\infty (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{D} \tilde{D}^T (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{E}_\infty (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + E_\infty \tilde{D}^T (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T} \tilde{E}_\infty^T + E_\infty E_\infty^T \\ &= \tilde{E}_\infty (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} [\tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T] + [\tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T]^T (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T} \tilde{E}_\infty^T + E_\infty E_\infty^T \\ & - \gamma^{-2} \tilde{E}_\infty (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} (\tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T) M^{-1} (\tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T)^T (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T} \tilde{E}_\infty^T \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sementara ruas kiri dan ruas kanan dari (3.21) berturut-turut sama dengan  $H(j\omega)H^*(j\omega)$  dan

$$S + S^* - \gamma^{-2} S M^{-1} S^* + \gamma^2 (I_{q_\infty} - M),$$

dimana

$$S \cong \tilde{E}_\infty (j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} [\tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T] \text{ dan}$$

$$M = I_{q_\infty} - \gamma^{-2} E_\infty E_\infty^T.$$

Sehingga (3.21) menjadi

$$\begin{aligned} H(j\omega)H^*(j\omega) &= - \left[ \left( \gamma M^{\frac{1}{2}} \gamma^{-1} S M^{-\frac{1}{2}} \right) \left( \gamma M^{\frac{1}{2}} \gamma^{-1} S M^{-\frac{1}{2}} \right)^* \right] \\ & + \gamma^2 I_{q_\infty} \geq 0 \end{aligned}$$

Untuk membuktikan (3.16) kurangkan (3.11) ke (3.14), diperoleh:

$$\begin{aligned} & \tilde{A}(\theta - \tilde{Q}) + (\theta - \tilde{Q})\tilde{A}^T \\ & + \gamma^{-2} (\tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T) M^{-1} (\tilde{D} \tilde{E}_\infty^T + \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T)^T = 0 \end{aligned}$$

Karena  $\tilde{A}$  stabil asimtotik, hal ini ekuivalen dengan  $\theta - \tilde{Q} \geq 0$ , sehingga

$$J(A_c, B_c, C_c) \leq \mathfrak{I}(A_c, B_c, C_c, \theta).$$

Jadi terbukti  $\mathfrak{I}(A_c, B_c, C_c, \theta) \cong \text{tr} \theta \tilde{R}$ . ■

yaitu meminimalkan performansi fungsional  $J(A_c, B_c, C_c)$ , akan dibahas terlebih dahulu Lemma 2 berikut, yang menjamin eksistensi solusi tunggal yang definit non negative untuk (3.14) jika (3.15) terpenuhi.

**Lemma 2.** Misal diberikan  $(A_c, B_c, C_c)$ , dan  $\tilde{A}$  adalah stabil asimtotik dan asumsi-kan pelemahan gangguan (3.15) dipenuhi. Maka terdapat solusi tunggal  $\theta$  yang definit non negative yang memenuhi (3.14)

Lemma 1 menunjukkan bahwa pelemahan gangguan  $H_\infty$  dengan sendirinya menguat ketika solusi definit untuk (3.14) ada dan  $\tilde{A}$  stabil asimtotik. Hal ini berarti bahwa syarat pertama dan kedua telah dipenuhi.

Sedemikian sehingga nilai eigen  $\tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{D} \tilde{E}_\infty^T M^{-1} \tilde{E}_\infty + \gamma^{-2} \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T M^{-1} \tilde{E}_\infty$  berada di bagian real sebelah kiri.

**Bukti.**

Bentuk (3.14) ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{D} \tilde{E}_\infty^T M^{-1} \tilde{E}_\infty \right) \theta + \theta \left( \tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{D} \tilde{E}_\infty^T M^{-1} \tilde{E}_\infty \right)^T \\ & + \gamma^{-2} \tilde{\theta} \tilde{E}_\infty^T M^{-1} \tilde{E}_\infty^T \theta + \tilde{D} N^{-1} \tilde{D}^T \end{aligned}$$

Misalkan  $\theta$  adalah solus yang definit nonnegative, menurut [2, Teorema 23-3] dengan  $A^T = \tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{D} \tilde{E}_\infty^T M^{-1} \tilde{E}_\infty$  dan  $-KBB^T = \gamma^{-2} \tilde{E}_\infty^T M^{-1} \tilde{E}_\infty \theta$ . Akan dibuktikan

$$\text{Re} \lambda(A - BB^T K) = \text{Re} \lambda(A - BB^T K)^T < 0.$$

Misalkan terdapat  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  dengan  $\theta_1 \neq \theta_2$  sedemikian sehingga

$\tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{D} E_{\infty}^T M^{-1} \tilde{E}_{\infty} + \gamma^{-2} \tilde{E}_{\infty}^T M^{-1} \tilde{E}_{\infty} \theta_1$  dan  $\tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{D} E_{\infty}^T M^{-1} \tilde{E}_{\infty} + \gamma^{-2} \tilde{E}_{\infty}^T M^{-1} \tilde{E}_{\infty} \theta_2$

memiliki nilai eigen di sebelah kiri sumbu imajiner, sehingga menurut [2, Teorema 23-2] solusi dari

$$\dot{x}(t) = \tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{D} E_{\infty}^T M^{-1} \tilde{E}_{\infty} + \gamma^{-2} \tilde{E}_{\infty}^T M^{-1} \tilde{E}_{\infty} \theta_i, i = 1, 2$$

dengan  $x(0) = x_0$  mendekati nol untuk  $t \rightarrow \infty$ .

Menurut [2, Teorema 22-2 dan Lemma 21-1],

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left( u^T(\sigma) u(\sigma) + x^T(\sigma) \tilde{D} N^{-1} \tilde{D}^T x(\sigma) \right) d\sigma \\ &= x^T(0) \theta_1 x(0) - x^T(t) \theta_1 x(t) + \int_0^t \left\| u(t) + B^T \theta_1 x(t) \right\|^2 dt \\ &= x^T(0) \theta_2 x(0) - x^T(t) \theta_2 x(t) + \int_0^t \left\| u(t) + B^T \theta_1 x(t) \right\|^2 dt \end{aligned}$$

Karena  $\theta_1 \neq \theta_2$  dan keduanya simetris sehingga terdapat  $x_0$  sedemikian sehingga  $x_0^T \theta_1 x_0 \geq x_0^T \theta_2 x_0$ .

Misalkan  $x_0^T \theta_1 x_0 > x_0^T \theta_2 x_0$  dan  $u(t) = -B^T \theta_2 x(t)$ . Untuk  $t \rightarrow \infty$ , dihasilkan

$$x_0^T \theta_2 x_0 = x_0^T \theta_1 x_0 + \int_0^{\infty} \left\| B^T (\theta_1 - \theta_2) x(t) \right\|^2 dt.$$

Kontradiksi dengan  $x_0^T \theta_1 x_0 \geq x_0^T \theta_2 x_0$ . Sehingga pengandaian salah.

Jadi terdapat dengan tunggal  $\theta$  yang definit non negatif yang memenuhi (3.14) sedemikian sehingga nilai eigen

$$\tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{D} E_{\infty}^T M^{-1} \tilde{E}_{\infty} + \gamma^{-2} \theta \tilde{E}_{\infty}^T M^{-1} \tilde{E}_{\infty}$$

berada di bagian real sebelah kiri. ■

Dari Lemma 1 dan Lemma 2, diketahui bahwa penggantian (3.11) dengan (3.14) membuktikan kestabilan lup tertutup, pengurangan/pelemahan gangguan  $H_{\infty}$ , dan batas atas untuk criteria performansi  $H_2$ . Artinya, misalkan diberikan pengontrol  $(A_c, B_c, C_c)$  dimana terdapat

solusi definit non negative untuk (3.15), criteria performansi  $J(A_c, B_c, C_c)$  dari pengontrol dijamin tidak lebih buruk dari  $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$ . Karena itu

$J(A_c, B_c, C_c, \theta)$  dapat diinterpretasikan sebagai alat bantu untuk mengarahkan pada problem optimasi berikut ini, yaitu menentukan  $(A_c, B_c, C_c, \theta)$  yang meminimalkan  $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$  dengan kendala (3.14) dimana  $\theta \in \mathbb{N}^n$ .

### 3.2. Syarat Cukup untuk Pelemahan Gangguan $H_{\infty}$

Dalam subbab ini akan dinyatakan syarat cukup untuk karakterisasi pengontrol order penuh yang menjamin kestabilan lup tertutup, pelemahan gangguan  $H_{\infty}$  dan batas atas untuk criteria performansi  $H_2$ .

Untuk  $Q, P, \hat{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dan  $\alpha, \beta \geq 0$  didefinisikan notasi

$$Q_a \cong QC^T + V_{12\infty},$$

$$P_a \cong \left[ B^T + \gamma^{-2} R_{02\infty}^T D_1^T + \gamma^{-2} R_{02\infty}^T (Q + \hat{Q}) \right] P + R_{12}^T$$

,  $S \cong (\alpha^2 I_n + \beta^2 \gamma^{-2} \hat{Q} P)^{-1}$ , dimana inversnya ada.

**Remark 1.** Misalkan  $(A_c, B_c, C_c, \theta)$  memenuhi masalah minimasi  $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$ , maka terdapat

$Q, P, \hat{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  yang memenuhi

$$0 = \left( A + \gamma^{-2} D_1 R_{01\infty} \right) Q + Q \left( A + \gamma^{-2} D_1 R_{01\infty} \right)^T + \gamma^{-2} Q R_{1\infty} Q + V_{1\infty} - Q_a V_{2\infty}^{-1} Q_a^T \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \left( A - B \hat{R}_2^{-1} P_a S + \gamma^{-2} Q \left[ R_{1\infty} - R_{12\infty} \hat{R}_2^{-1} P_a S \right] \right. \\ & \left. + \gamma^{-2} \left[ D_1 R_{01\infty} - D_1 R_{02\infty} \hat{R}_2^{-1} P_a S \right] \hat{Q} \right. \\ & \left. + Q \left( A - B \hat{R}_2^{-1} P_a S + \gamma^{-2} Q \left[ R_{1\infty} - R_{12\infty} \hat{R}_2^{-1} P_a S \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma^{-2} \left[ D_1 R_{01\infty} - D_1 R_{02\infty} \hat{R}_2^{-1} P_a S \right] \right)^T \right. \\ & \left. + \gamma^{-2} \hat{Q} \left( R_{1\infty} - R_{12\infty} \hat{R}_2^{-1} P_a S - S^T P_a \hat{R}_2^{-1} R_{12\infty}^T \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta^2 S^T P_a^t \hat{R}_2^{-1} P_a S \right) \hat{Q} + Q_a V_{2\infty}^{-1} Q_a^T \right. \tag{3.23} \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 A_c &= A - B\hat{R}_2^{-1}P_aS - Q_aV_2^{-1}C - Q_aV_{12\infty}^{-1}D\hat{R}_2^{-1}P_aS \\
 &+ \gamma^{-2}\left(QR_{1\infty} + D_1R_{01\infty} - D_1R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS \right. \\
 &\left. - QR_{12\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS - Q_aV_{2\infty}^{-1}D_2R_{01\infty} \right. \\
 &\left. + Q_aV_{2\infty}^{-1}D_2R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\right) \\
 B_c &= Q_aV_{2\infty}^{-1}, \quad C_c = -\hat{R}_2^{-1}P_aS, \\
 \theta &= \begin{bmatrix} Q + \hat{Q} & \hat{Q} \\ \hat{Q} & Q \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.24)-(3.27}$$

Lebih lanjut *auxiliary cost* diberikan dengan

$$\begin{aligned}
 J(A_c, B_c, C_c, \theta) &= \text{tr}\left[\left(Q + \hat{Q}\right)R_1 - 2R_{12}\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q} \right. \\
 &\left. + S^T P_a^T \hat{R}_2^{-1}R_2\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}\right]
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Sebaliknya jika terdapat  $Q, P, \hat{Q} \in \mathbb{N}^{\tilde{n}}$  yang memenuhi (3.22, 3.23), maka  $(A_c, B_c, C_c, \theta)$  seperti (3.24-3.27) memenuhi (3.14) dengan *auxiliary cost* seperti (3.28).

**Teorema 1.** Misalkan terdapat  $Q, P, \hat{Q} \in \mathbb{N}^{\tilde{n}}$  yang memenuhi (3.22,3.23) dengan  $(A_c, B_c, C_c, \theta)$  seperti (3.24-3.27). Maka  $(\tilde{A}, \tilde{D})$  stabilizable jika dan hanya jika  $\tilde{A}$  stabil asimtotik. Dalam kasus ini, fungsi alih lup tertutup  $H(s)$  memenuhi kendala pelemahan gangguan  $H_\infty$  ( $\|H(s)\| \leq \gamma$ ), dan performansi fungsional (3.7) memenuhi batas

$$\begin{aligned}
 J(A_c, B_c, C_c) &= \text{tr}\left[\left(Q + \hat{Q}\right)R_1 - 2R_{12}\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q} \right. \\
 &\left. + S^T P_a^T \hat{R}_2^{-1}R_2\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}\right]
 \end{aligned}$$

**Bukti.**

Bagian sebaliknya dari Remark 1 menunjukkan bahwa  $\theta$  dari (3.32) memenuhi (3.14) dengan *auxiliary cost* seperti (3.32). Hal ini berarti menurut Lemma 1, kestabilan  $(\tilde{A}, \tilde{D})$  ekuivalen dengan kestabilan asimtotik dari  $\tilde{A}$ . Sehingga pelemahan

gangguan  $H_\infty$  terpenuhi dan performansi fungsional (3.7) memenuhi batas

$$\begin{aligned}
 J(A_c, B_c, C_c) &= \text{tr}\left[\left(Q + \hat{Q}\right)R_1 - 2R_{12}\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q} \right. \\
 &\left. + S^T P_a^T \hat{R}_2^{-1}R_2\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}\right]
 \end{aligned}$$

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa, syarat cukup untuk mendesain pengontrol dengan kendala  $H_\infty$  pada suatu fungsi alih lup tertutup terdiri dari tiga persamaan aljabar Riccati yang dimodifikasi dalam variable  $Q, P, \hat{Q}$ .

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bernstein D.S, Haddad. (1989), *LQG Control with an  $H_\infty$  Performance Bound: A Riccati Equation Approach*, IEEE Trans. Automat. Control (34), pp:293-305.
- [2] Brockett, R.W. (1970), *Finite Dimensional Linear System*, John Willey and Sons, New York.
- [3] Colaneri, P, Locatelli, A. (1997), *Control Theory and Design: An  $H_2$  and  $H_\infty$  Viewpoint*, Academic Press.
- [4] Doyle, J.C., Glover, K, Khargoneker, P.P. (1989), *State Space Solution to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problem*, IEEE Trans. Automat. Control (34), pp:831-847.
- [5] Doyle, J.C., Glover, K. (1988), *State Space Formulae for All Stabilizing Controller that Satisfy and  $H_\infty$  Norm Bound and Relation to Risk Sensitivity*, System Control Lett (11), pp: 161-171.
- [6] Glover, K, Limebeer, Doyle, *A Characterization of All Solution to The Four Block General Distance Problem*. Preprint.
- [7] Wonham, W.M. (1979), *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer-Verlag, New York.
- [8] Zames, G. (1981), *Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformation, Multiplicative Seminorm and Approximate Inverses*, IEEE

Trans. Automat. Control (26), pp:301-320.

- [9] Zhou, K, Doyle. (1998), *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall International.
-