

BANACH LATTICE YANG MEMUAT c_0

Farikhin

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Jl. Prof. H. Soedarto, SH Tembalang Semarang 50275

Abstract. Let Banach lattices E and F . Lattice homomorphism $T : E \rightarrow F$ is called lattice embedding if there exists positive numbers m and n such that for all $x \in E$ implies $m \cdot \|x\| \leq \|T(x)\| \leq n \cdot \|x\|$. In others word, Banach lattice E is said to be lattice embeddable in F if there exist closed subspace $F_0 \subseteq F$ such that F_0 and E are lattice isomorphic. As well known that dual space of E is Levi- σ , i.e. $\sup\{\bar{x}_n / n = 1, 2, \dots\}$ in E^* exist for every increasing bounded (in the norm) sequences $\{\bar{x}_n / n = 1, 2, \dots\}$ in E^* . If sequences space c_0 is lattice embeddable in E^* then sequences space l_∞ is lattice embeddable in E^* , within E^* is dual space of E . This theorem is proven by Groenewegen in [4]. For Levi- σ Banach lattice E , we proof that sequences space c_0 is lattice embeddable in E if only if sequences space l_∞ is lattice embeddable in E .

Keywords: Levi- σ Banach lattice and lattice embeddable

1. PENDAHULUAN

Dalam tulisan ini, ruang vektor yang dimaksud adalah ruang vektor atas *field* R , dengan R menyatakan himpunan bilangan real. Notasi \leq menyatakan urutan parsial (partial ordering) pada himpunan tak-kosong. Sedangkan vektor nol ditulis dengan notasi θ .

Banach lattice E tersisip lattice di dalam F jika terdapat homomorfisma lattice $T : E \rightarrow F$ dan dua bilangan $m, n > 0$ sedemikian hingga

$$m \cdot \|x\| \leq \|T(x)\| \leq n \cdot \|x\|,$$

untuk setiap $x \in E$.

Untuk selanjutnya, Banach lattice F memuat Banach lattice E selalu dimaksudkan bahwa E tersisip lattice ke dalam F .

Sebagai contoh, Banach lattice l_∞ memuat Banach lattice $C[a, b]$. Uraian contoh ini dapat dilihat di dalam [1].

Syarat cukup dan perlu agar Banach lattice E memuat c_0 atau l_∞ telah dibahas dalam [1] dan [5]. Sedangkan syarat cukup dan perlu agar ruang Banach X yang memuat c_0 atau l_∞ dibahas di dalam [3]. Dalam [2], dibahas syarat perlu dan

cukup agar Banach lattice E memuat l_∞ menggunakan ruang operator.

Diberikan Banach lattice E dan E^* ruang dualnya. Dalam [4], Banach lattice E^* memuat c_0 jika dan hanya jika E^* memuat l_∞ . Ruang dual E^* merupakan Banach lattice yang mempunyai sifat Levi- σ . Dalam tulisan ini, dibuktikan bahwa Banach lattice E memuat c_0 jika dan hanya jika E memuat l_∞ asalkan E mempunyai sifat Levi- σ .

2. BANACH LATTICE

Ruang vektor X yang dilengkapi dengan urutan parsial \leq dinamakan ruang Riesz atau ruang vektor lattice jika memenuhi syarat-syarat :

- (i). X lattice,
- (ii). untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ di dalam X dengan $\bar{a} \leq \bar{b}$ berakibat $\bar{a} + \bar{c} \leq \bar{b} + \bar{c}$
- (iii). untuk setiap bilangan positif α dan setiap \bar{a} di dalam X dengan $\bar{a} \geq \theta$ berlaku $\alpha \cdot \bar{a} \geq \theta$.

Sifat-sifat ruang Riezs dibahas secara mendalam di dalam [6]. Ruang Riezs bernorma adalah ruang Riezs E yang dilengkapi norma $\| \cdot \|$ dan mempunyai sifat (i), (ii), (iii), dan

(iv). untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in E$, dengan
 $\sup\{-\bar{x}, \bar{x}\} = |\bar{x}| \leq |\bar{x}| = \sup\{-\bar{y}, \bar{y}\}$, berlaku $\|\bar{x}\| \leq \|\bar{y}\|$.

Jika setiap barisan Cauchy di dalam ruang Riezs bernorma merupakan barisan konvergen, maka E disebut Banach *lattice*. Dengan kata lain, ruang Banach E dinamakan Banach *lattice* jika E yang dilengkapi urutan parsial \leq memenuhi (i), (ii), (iii), dan (iv).

Untuk selanjutnya, notasi E dan F selalu dimaksudkan sebagai Banach *lattice*, kecuali ada penjelasan khusus.

Contoh-contoh Banach *lattice*:

1. Ruang barisan bilangan yang konvergen ke nol, ditulis dengan notasi c_0 , dilengkapi urutan parsial: $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots\} \in c_0$ didefinisikan $\bar{x} \leq \bar{y}$ jika $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n = 1, 2, 3, \dots$. Ruang barisan c_0 merupakan ruang Riezs. Selanjutnya, jika didefinisikan norma pada c_0 , $\|\bar{x}\| = \sup |x_n|$ untuk setiap $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \in c_0$, maka c_0 adalah Banach *lattice*.

Untuk selanjutnya, norma yang didefinisikan dalam Banach *lattice* c_0 selalu dimaksudkan $\|\bar{x}\| = \sup |x_n|$, untuk setiap $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \in c_0$.

2. Ruang barisan bilangan yang terbatas, ditulis dengan notasi l_∞ , dilengkapi urutan parsial: $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots\} \in l_\infty$ didefinisikan $\bar{x} \leq \bar{y}$ jika $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n = 1, 2, 3, \dots$. Ruang barisan l_∞ merupakan ruang Riezs. Selanjutnya, jika didefinisikan norma pada l_∞ , $\|\bar{x}\| = \sup |x_n|$ untuk setiap $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \in l_\infty$, maka l_∞ adalah Banach *lattice*.

Untuk selanjutnya, norma yang didefinisikan dalam Banach *lattice* l_∞ selalu dimaksudkan $\|\bar{x}\| = \sup |x_n|$, untuk setiap $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \in l_\infty$.

3. Diberikan $C[a, b]$ ruang vektor fungsi bernilai real yang didefinisikan pada

$[a, b]$. Urutan parsial yang didefinisikan pada $C[a, b]$: $f \leq g$ jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$. $C[a, b]$ yang dilengkapi urutan parsial demikian merupakan ruang Riezs. Ruang Riezs $C[a, b]$ menjadi Banach *lattice* jika dilengkapi dengan norma $\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in [a, b]\}$ untuk $f \in C[a, b]$.

Diberikan E dan F ruang-ruang Riezs, dan transformasi linear $T : E \rightarrow F$. Transformasi linear $T : E \rightarrow F$ dinamakan homomorfisma *lattice* jika $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E$ berlaku

$$T(\bar{x} \vee \bar{y}) = T(\bar{x}) \vee T(\bar{y}) \text{ dan}$$

$$T(\bar{x} \wedge \bar{y}) = T(\bar{x}) \wedge T(\bar{y}),$$

dengan $\bar{x} \vee \bar{y} = \sup\{\bar{x}, \bar{y}\}$ dan

$$\bar{x} \wedge \bar{y} = \inf\{\bar{x}, \bar{y}\}.$$

Diberikan $T : E \rightarrow F$ transformasi linear, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

1. $T : E \rightarrow F$ homomorfisma *lattice*,

2. $|T(\bar{x})| = T(|\bar{x}|)$ untuk setiap $\bar{x} \in E$.

Pembuktian ekuivalensi pernyataan di atas dapat dilihat di dalam [1], [5], atau [6].

3. BANACH LATTICE YANG MEMUAT c_0

Sifat berikut akan digunakan pada teorema yang dihasilkan. Banach *lattice* E dikatakan Levi- σ jika untuk setiap barisan $\{\bar{a}_n / n = 1, 2, 3, \dots\}$ di dalam E^+ (*positive cone of E*) yang naik monoton dan $\sup\{\|\bar{a}_n\| / n = 1, 2, 3, \dots\} < \infty$ berakibat $\sup\{\bar{a}_n / n = 1, 2, 3, \dots\} \in E$.

Banach *lattice* Levi- σ tidak bersifat heriditas. Dalam artian, sub Banach *lattice* dari Banach *lattice* yang bersifat Levi- σ belum tentu bersifat Levi- σ juga. Mudah dibuktikan bahwa c_0 adalah sub Banach *lattice* dari l_∞ . Mengingat aksioma kelengkapan bilangan real, Banach *lattice* l_∞ bersifat Levi- σ .

Sedangkan c_0 tidak bersifat Levi- σ . Ambil barisan $\{\bar{x}_n / n = 1, 2, \dots\} \subseteq c_0^+$ dengan $\bar{x}_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$, $\bar{x}_2 = \{1, 1, 0, 0, \dots\}$,

$\bar{x}_3 = \{1, 1, 1, 0, 0, \dots\}, \dots$ Barisan tersebut naik monoton dan terbatas, tetapi supremumnya tidak termuat di dalam c_0 , yakni $\bar{x} = \{1, 1, 1, 1, \dots\} \notin c_0$.

Diberikan Banach lattice E . Ruang dual E , ditulis dengan E^* , merupakan Banach lattice yang bersifat Levi- σ [4].

Teorema 1. [1]. Banach lattice E memuat c_0 jika dan hanya jika terdapat $\{\bar{x}_n / n = 1, 2, \dots\}$ di dalam E^+ yang saling asing dan memenuhi sifat-sifat :

- (a). $0 < \inf \{ \|\bar{x}_n\| / n = 1, 2, \dots \}$
- (b). terdapat bilangan $M > 0$ sedemikian hingga $\|\sum_{p=1}^n \bar{x}_p\| \leq M$ untuk setiap n .

Teorema 2. Diberikan Banach lattice E yang mempunyai sifat Levi- σ . Banach lattice E memuat l_∞ jika dan hanya jika terdapat barisan $\{\bar{x}_n / n = 1, 2, \dots\}$ di dalam E^+ yang saling asing dan memenuhi sifat-sifat :

- (a). $0 < \inf \{ \|\bar{x}_n\| / n = 1, 2, \dots \}$
- (b). terdapat bilangan $M > 0$ sedemikian hingga $\|\sum_{p=1}^n \bar{x}_p\| \leq M$ untuk setiap n .

Bukti.

Syarat perlu. Banach lattice E memuat l_∞ . Namakan $T : l_\infty \rightarrow E$ homomorfisma lattice, maka terdapat $n, m > 0$ dan setiap $\bar{A} \in l_\infty$ berlaku

$$N \cdot \|\bar{A}\| \leq \|T(\bar{A})\| \leq M \cdot \|\bar{A}\| \quad (3.1)$$

Dibentuk barisan yang saling asing $\{\bar{A}_n / n = 1, 2, \dots\} \subseteq (l_\infty)^+$ dengan $\bar{A}_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$, $\bar{A}_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$, $\bar{A}_3 = \{0, 0, 1, 0, \dots\}$,

Karena $T : l_\infty \rightarrow E$ homomorfisma lattice maka $\{\bar{x}_n = T(\bar{A}_n) / n = 1, 2, \dots\} \subseteq E^+$ dan saling asing. Lebih lanjut, mengingat persamaan (3.1) maka

$$0 < N = N \cdot \|\bar{A}_n\| \leq \|\bar{x}_n\| \text{ dan } \|\sum_{p=1}^n \bar{x}_p\| = \|\sum_{p=1}^n T(\bar{A}_p)\| = \|T(\sum_{p=1}^n \bar{A}_p)\|$$

$$\leq M \cdot \|\sum_{p=1}^n \bar{A}_p\| = M, \text{ untuk setiap } n.$$

Dengan demikian, terdapat barisan $\{\bar{x}_n / n = 1, 2, \dots\}$ di dalam E^+ yang saling asing dan memenuhi sifat-sifat :

- (a). $0 < \inf \{ \|\bar{x}_n\| / n = 1, 2, \dots \}$ dan
- (b). terdapat bilangan $M > 0$ sedemikian hingga $\|\sum_{p=1}^n \bar{x}_p\| \leq M$, untuk setiap n .

Syarat cukup. Menurut yang diketahui, terdapat $\{\bar{x}_n / n = 1, 2, \dots\}$ di dalam E^+ yang saling asing dan memenuhi sifat-sifat :

- (a). $0 < \inf \{ \|\bar{x}_n\| / n = 1, 2, \dots \}$ dan
- (b). terdapat bilangan $M > 0$ sedemikian hingga $\|\sum_{p=1}^n \bar{x}_p\| \leq M$ untuk setiap n .

Untuk setiap $\bar{B} = \{b_1, b_2, \dots\} \in (l_\infty)^+$, dibentuk $\{\sum_{p=1}^n b_p \cdot \bar{x}_p / n = 1, 2, \dots\}$.

Barisan yang terbentuk bersifat monoton naik dan $\|\sum_{p=1}^n b_p \cdot \bar{x}_p\| \leq \|\bar{B}\| \cdot M$.

Hal ini berakibat

$$\sup\{\|\sum_{p=1}^n b_p \cdot \bar{x}_p\| / n = 1, 2, \dots\} < \infty.$$

Karena E bersifat Levi- σ maka $\sum_{p=1}^\infty b_p \cdot \bar{x}_p$ termuat di dalam E^+ .

Khususnya $\bar{x} = \sum_{p=1}^\infty \bar{x}_p$ termuat di dalam E^+ .

Berdasarkan uraian sebelumnya, didefinisikan fungsi $S : (l_\infty)^+ \rightarrow E^+$ dengan rumus $S(\bar{B}) = \sum_{p=1}^\infty b_p \cdot \bar{x}_p$ untuk setiap

$\bar{B} = \{b_1, b_2, \dots\} \in (l_\infty)^+$. Fungsi S merupakan fungsi aditif, sehingga dapat dikonstruksikan fungsi positif $T : l_\infty \rightarrow E$ sedemikian hingga $T(\bar{a}) = S(\bar{a})$ untuk $\bar{a} \in (l_\infty)^+$.

Selanjutnya akan dibuktikan transformasi $T : l_\infty \rightarrow E$ merupakan homomorfisma lattice. Ambil sebarang $\bar{B} = \{b_1, b_2, \dots\} \in l_\infty$ maka $|\bar{B}| = \{|b_1|, |b_2|, \dots\}$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} |T(\bar{B})| &= |T(\{b_1, b_2, \dots\})| \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \cdot \bar{x}_p \\ &= T(|\bar{B}|) \end{aligned}$$

atau $T : l_{\infty} \rightarrow E$ suatu homomorfisma *lattice*.

Lebih lanjut, untuk setiap n berlaku

$$\begin{aligned} N \cdot |b_n| &\leq \left\| \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \cdot \bar{x}_p \right\| = \|T(|\bar{B}|)\| \\ &\leq \|\bar{B}\| \cdot \left\| \sum_{p=1}^{\infty} \bar{x}_p \right\| = M \cdot \|\bar{B}\|, \end{aligned}$$

dengan $M = \|\bar{X}\|$.

Hal ini berakibat

$$\begin{aligned} N \cdot \|\bar{B}\| &\leq \|T(|\bar{B}|)\| \\ &= \|T(\bar{B})\| \\ &= \|T(\bar{B})\| \\ &\leq M \cdot \|\bar{B}\| \quad \forall \bar{B} \in l_{\infty} \end{aligned}$$

Jadi Banach *lattice* l_{∞} tersisip *lattice* ke dalam E . ■

Berdasarkan Teorema 1 dan Teorema 2 diperoleh teorema berikut .

Teorema 3. Diberikan E Banach *lattice* yang bersifat *Levi- σ* . Banach *lattice* E memuat c_0 jika dan hanya jika Banach *lattice* E memuat l_{∞} .

Mengingat E^* adalah Banach *lattice* yang bersifat *Levi- σ* , dengan menggunakan Teorema 3 diperoleh pernyataan berikut.

Akibat. Banach *lattice* E^* memuat c_0 jika dan hanya jika E^* memuat l_{∞}

4. KESIMPULAN

Banach *lattice* E^* memuat ruang barisan c_0 jika dan hanya jika E^* memuat ruang barisan l_{∞}

Jika Banach *lattice* E^* diganti dengan Banach *lattice* E yang bersifat *Levi- σ* , maka lemma tersebut masih berlaku. Dalam artian, E memuat ruang barisan c_0 jika dan hanya jika E memuat ruang barisan l_{∞} , asalkan E bersifat *Levi- σ* . Dengan kata lain, telah dibuktikan suatu teorema yang lebih umum daripada lemma yang dibuktikan oleh Groenewegen.

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1].Burkinshaw, O & Aliprantis, C. (1985) , *Positive operators* , Academic Press , Orlando USA.
- [2].Farikhin. (2002), *Syarat Cukup Agar l_{∞} Tersisip Lattice ke Dalam Ruang Banach Lattice*, Jurnal Matematika atau Pembelajarannya (Edisi khusus), Tahun VIII, Universitas Negeri Malang.
- [3].Ferrando , J.C. & Amigo, J.M. (2000), *On Copies of c_0 in the Bounded Linear operators Spaces* , Czechoslovak Math. Jour. **50** (125), Praha.
- [4].Groenewegen, G.L.M. (1982), *On Spaces of Banach lattice valued Functions and measures*, Ph.D. Dissertation , Nijmegen University, Netherland.
- [5].Meyer-Nieberg, P. (1991), *Banach Lattice*, Springer, Berlin.
- [6].Zaanen, A. C. (1997) , *Introduction to Operators Theory in Riesz Spaces* , Springer, Berlin.