

PERKEMBANGAN ESTIMATOR DENSITAS NON PARAMETRIK DAN APLIKASINYA

Hasbi Yasin, Suparti
 Staf PS Statistika, Jurusan Matematika, FMIPA, UNDIP
 Jl. Prof. Sudarto, Kampus UNDIP Tembalang, Semarang

Abstrak: Jika $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ data pengamatan independen dari suatu distribusi yang tak diketahui fungsi densitasnya maka fungsi densitas f dapat diestimasi dengan pendekatan parametrik dan non parametrik. Pendekatan parametrik dilakukan jika asumsi bentuk f diketahui, sedangkan pendekatan non parametrik dilakukan jika asumsi bentuk f tak diketahui.

Dalam pendekatan non parametrik, fungsi f diasumsikan merupakan fungsi mulus atau terintegralkan secara kuadrat. Beberapa pendekatan non parametrik diantaranya dengan metode histogram, metode kernel, metode Fourier dan metode wavelet. Suatu ukuran kebaikan dari estimator dapat dilihat dari tingkat penurunan IMSE nya (Integral dari rata-rata jumlah kuadrat).

Estimator wavelet mempunyai IMSE optimal yang lebih cepat menuju nol dari estimator Fourier tetapi sama cepatnya dengan estimator kernel. Meskipun mempunyai IMSE yang sama cepat dengan metode kernel namun metode wavelet mempunyai keunggulan dalam mengestimasi fungsi baik yang bersifat mulus maupun tidak mulus.

Kata Kunci: estimator densitas, non parametrik

PENDAHULUAN

Jika diberikan data pengamatan independen $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, untuk menentukan distribusi dari X ekuivalen dengan menentukan fungsi densitasnya. Untuk mengestimasi fungsi densitas f dapat dilakukan dengan dua pendekatan yaitu pendekatan parametrik dan non parametrik. Pendekatan parametrik dilakukan jika asumsi bentuk f diketahui dan tergantung pada suatu parameter, sehingga mengestimasi f ekuivalen dengan mengestimasi parameternya, sedangkan pendekatan non parametrik dilakukan jika asumsi bentuk f tidak diketahui. Dalam hal ini diasumsikan bahwa fungsi f termuat dalam kelas fungsi mulus dalam arti mempunyai turunan kontinu atau terintegralkan secara kuadrat.

Dalam tulisan ini dibahas tentang perkembangan estimator densitas non parametrik, sifat-sifat dan contoh aplikasinya dengan program S-Plus for Windows.

PEMBAHASAN

Estimator Histogram

Metode klasik yang paling populer untuk mengetahui bentuk fungsi densitas adalah metode histogram. Suatu histogram disusun dengan meletakkan titik-titik data ke dalam suatu bin atau kelas. Setiap bin dinyatakan secara grafik oleh segi empat dengan lebar sama dan tinggi proporsional dengan banyaknya titik-titik data yang terletak dalam bin terkait. Bin ditentukan dengan memilih titik awal x_0 dan lebar bin (binwidth) h . Untuk sembarang integer l , suatu bin memuat interval setengah terbuka $[x_0+lh, x_0+(l+1)h)$. Nilai estimator densitas histogram di sembarang titik x dapat dinyatakan sebagai

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \#X_i \text{ dalam bin yang sama dengan } x. \quad (1)$$

Pemilihan lebar bin h kecil, histogram memuat banyak batang kecil-kecil, sedangkan untuk h besar histogram memuat sedikit batang besar-besar. Pada estimator histogram, fungsi estimasinya bersifat kontinu sepotong-sepotong.

Estimator Kernel

Suatu fungsi $K(\cdot)$ disebut fungsi kernel jika K fungsi kontinu, berharga riil, simetris, terbatas dan $\int_{-\infty}^{\infty} K(y)dy = 1$. Jika K suatu kernel dengan sifat

1. $\int_{-\infty}^{\infty} x^j K(x) dx = 0$, untuk $j=1,2,\dots,r-1$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} x^r K(x) dx \neq 0$ atau ∞ , maka K disebut kernel order r .

Estimator densitas kernel merupakan pengembangan dari estimator histogram. Jika $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ data pengamatan independen dari suatu distribusi dengan densitas f (tak diketahui), maka estimator densitas kernel f dengan kernel K dan lebar jendela h didefinisikan sebagai

$$\hat{f}_h(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (2)$$

Lema 1 [4]. Diberikan $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ data pengamatan independen dari suatu distribusi dengan densitas f dan diasumsikan $f \in C^2(\mathbb{R})$, $c_K = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)du$, $d_K = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 K^2(u)du$. Jika $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ dan $nh \rightarrow \infty$ maka Bias $(\hat{f}_h(x)) = (h^2/2)f''(x)d_K + o(h^2)$ dan $\text{Var}(\hat{f}_h(x)) = (nh)^{-1}c_K f(x) + o((nh)^{-1})$.

Akibat. $\text{MSE}(\hat{f}_h(x)) \approx (nh)^{-1} f(x)c_K + 1/4 h^4 [f''(x)]^2 d_K^2$,

$$\text{IMSE}(\hat{f}_h(x)) \approx \{(nh)^{-1}c_K + 1/4 [h^4 d_K^2] \int_{-\infty}^{\infty} [f''(x)]^2 dx$$

Dalam estimator kernel, tingkat kemulusan \hat{f}_h ditentukan oleh fungsi kernel K dan lebar jendela h yang disebut parameter pemulus, tetapi pengaruh kernel K tidak sedominan parameter pemulus h . Nilai h yang kecil memberikan grafik yang kurang mulus sedangkan nilai h yang besar memberikan grafik yang sangat mulus. Oleh karena itu, perlu dipilih nilai h optimal untuk mendapatkan grafik optimal. Salah satu cara memilih parameter pemulus h optimal menurut Hardle (1990), dengan meminimalkan IMSE asimtotis dari \hat{f}_h . Dengan cara ini didapat $h_{\text{opt}} \propto n^{-1/5}$ dan $\text{IMSE}_{\text{opt}} \propto n^{-4/5}$. Jika $f \in C^r$, maka $h_{\text{opt}} \propto n^{-1/(2r+1)}$ dan $\text{IMSE}_{\text{opt}} \propto n^{-2r/(2r+1)}$.

Estimator Deret Ortogonal

Diasumsikan $f \in L^2(\mathbb{R})$ dengan $L^2(\mathbb{R})$ ruang fungsi yang kuadratnya terintegralkan, dengan kata lain $L^2(\mathbb{R}) = \{f : \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx < \infty\}$. Menurut Vetterli dan Kovacecic (1995), $L^2(\mathbb{R})$ merupakan ruang Hilbert dengan perkalian skalar dan norma yang didefinisikan sebagai $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ dan $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx}$. Karena $L^2(\mathbb{R})$ merupakan ruang Hilbert dengan sendirinya merupakan ruang vektor (berdimensi tak hingga).

Jika $\{\phi_j\}_{j=1,2,\dots}$ sistem ortonormal lengkap dari $L^2(\mathbb{R})$, maka sembarang $f \in L^2(\mathbb{R})$ dapat dinyatakan sebagai $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j$ dengan α_j suatu skalar yang ditentukan dengan rumus $\alpha_j = \langle f, \phi_j \rangle$ dan memenuhi

identitas Parseval $\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2$. Karena $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx < \infty$, berakibat $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty$, sehingga $\alpha_j \rightarrow 0$, untuk

$j \rightarrow \infty$. Oleh karena itu, f dapat didekati oleh $f = \sum_{j=1}^J \alpha_j \phi_j$, untuk suatu bilangan bulat J cukup besar.

Jika $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ data pengamatan independen dari suatu distribusi dengan fungsi densitas f tak diketahui, maka estimator dari f adalah $\hat{f} = \sum_{j=1}^J \hat{\alpha}_j \varphi_j$ dengan $\hat{\alpha}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_j(X_i)$. Khususnya jika $f \in L^2[0,2\pi]$, maka f dapat didekati oleh deret Fourier,

$$f_j(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^J (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)), \quad (3)$$

dengan koefisien Fourier $a_j = 1/\pi \langle f, \cos(j \cdot) \rangle$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$ dan $b_j = 1/\pi \langle f, \sin(j \cdot) \rangle$, $j = 1, 2, 3, \dots, J$. Estimator deret Fourier dari densitas f adalah

$$\hat{f}_j(x) = \frac{1}{2}\hat{a}_0 + \sum_{j=1}^J (\hat{a}_j \cos(jx) + \hat{b}_j \sin(jx)), \quad (4)$$

dengan estimator koefisien Fourier $\hat{a}_j = \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^n \cos(jX_i)$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$ dan $\hat{b}_j = \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^n \sin(jX_i)$, $j = 1, 2, 3, \dots, J$.

Secara sama, jika $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ data observasi independen, $X_i \in [a, b]$ dan f fungsi densitas tidak diketahui, maka estimator deret Fourier dari f adalah

$$\hat{f}_J(x) = \frac{1}{2}\hat{a}_0 + \sum_{j=1}^J (\hat{a}_j \cos(2\pi jx) + \hat{b}_j \sin(2\pi jx)), \quad (5)$$

dengan $\hat{a}_j = \frac{2}{n(b-a)} \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi jX_i}{b-a}\right)$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$ dan $\hat{b}_j = \frac{2}{n(b-a)} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{2\pi jX_i}{b-a}\right)$, $j = 1, 2, 3, \dots, J$.

Sifat Asimtotis Estimator Deret Fourier

Estimator koefisien deret Fourier \hat{a}_j dan \hat{b}_j merupakan estimator tak bias dari a_j dan b_j , sebab

$$E(\hat{a}_j) = a_j \text{ dan } E(\hat{b}_j) = b_j. \text{ Besar IMSE } (\hat{f}_j) = \int_0^{2\pi} E(f - \hat{f}_j)^2 dx = \int_0^{2\pi} E(f - \hat{f}_j)^2 dx \approx \frac{A_1 J}{n} + \frac{A_2}{J},$$

untuk $n, J \rightarrow \infty$ (Suparti, 1999).

Tingkat kemulusan estimator deret Fourier \hat{f}_j ditentukan oleh pemilihan parameter pemulus J . Semakin kecil parameter pemulus J , semakin mulus estimasinya. Dengan kata lain semakin besar parameter pemulus J , semakin kurang mulus estimasi dari f . Oleh karena itu, perlu dipilih J optimal untuk mendapatkan estimasi yang optimal. Pemilihan J optimal dapat ditentukan berdasarkan IMSE asimtotis minimal dari \hat{f}_j .

Dengan meminimalkan IMSE asimtotis $\approx \frac{A_1 J}{n} + \frac{A_2}{J}$, untuk $n, J \rightarrow \infty$ diperoleh $J_{opt} \propto n^{1/2}$ dan $IMSE_{opt} \propto n^{-1/2}$. Pada estimator kernel maupun Fourier, fungsi estimasinya bersifat mulus.

Estimator Wavelet

Fungsi wavelet pertama kali diperkenalkan oleh Haar tahun 1910. Jenis wavelet dibedakan menjadi 2 yaitu wavelet induk Ψ dan wavelet bapak ϕ yang keduanya melahirkan seluruh keluarga wavelet $\Psi_{j,k}(x) = (p^{2^j})^{1/2} \Psi(p^{2^j}x - k)$ dan $\phi_{j,k}(x) = (p^{2^j})^{1/2} \phi(p^{2^j}x - k)$ untuk suatu skalar $p > 0$, dan tanpa mengurangi keumuman dapat diambil $p = 1$, sehingga $\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k)$ dan $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$. Kemudian Daubechies (1992) mengembangkan wavelet Haar menjadi wavelet Daubechies, wavelet simetris dan coiflet. Hall dan Patil (1995, 1996) serta Odgen (1997) mendekomposisi sembarang fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$ ke dalam basis wavelet ortonormal,

$$f(x) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k} \quad (6)$$

dengan $c_{j_0,k} = \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi_{j_0,k}(x) dx$ dan $d_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \Psi_{j_0,k}(x) dx$.

Deret wavelet (6) dapat didekati oleh

$$f_J(x) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k} \quad (7)$$

dengan $c_{j_0,k} = \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle$, $d_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle$ dan J besar.

Deret wavelet (7) ekuivalen dengan

$$f_J(x) = \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k} \quad \text{dengan } c_{J,k} = \langle f, \phi_{J,k} \rangle. \quad (8)$$

J merupakan parameter pemulus dan dinamakan level resolusi.

Estimator Densitas dengan Wavelet Haar

Wavelet Haar merupakan wavelet yang paling sederhana dan mempunyai rumus :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & , 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases} \quad \text{dan } \phi(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < 1 \\ 0 & , x \text{ yang lain.} \end{cases} \quad (9)$$

Sifat konstan sepotong-sepotong pada histogram merupakan sifat dasar sistem Haar. Secara khusus estimator histogram dapat disusun dengan menggunakan basis Haar. Jika diberikan $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ sekumpulan data pengamatan independen dari suatu distribusi dengan densitas f yang tak diketahui, maka dengan menggunakan wavelet Haar, banyaknya titik data yang terletak dalam interval $[p^{-1}2^{-j}k, p^{-1}2^{-j}(k+1))$ adalah

$p^{-1/2} 2^{-j/2} \sum_{i=1}^n \phi_{j,k}(X_i)$. Padahal untuk sembarang $x \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$, berlaku $p^{-1}2^{-j}[p2^jx] \leq x < p^{-1}2^{-j}([p2^jx]+1)$, sehingga

banyaknya titik data yang terletak dalam interval $p^{-1}2^{-j}[2^jx] \leq x < p^{-1}2^{-j}([2^jx]+1)$ adalah

$p^{-1/2} 2^{-j/2} \sum_{i=1}^n \phi_{j,[p2^jx]}(X_i) = \sum_{i=1}^n \phi(p2^j X_i - [p2^j x])$. Jadi estimator densitas histogram dengan titik awal 0 dan

lebar bin $p^{-1} 2^{-j}$ dapat ditulis sebagai

$$\hat{f}_j(x) = \frac{1}{n} p^{1/2} 2^{j/2} \sum_{i=1}^n \phi_{j,[p2^j x]}(X_i) = \sum_k \hat{c}_{j,k} \phi_{j,k}(x), \quad (10)$$

dengan $\hat{c}_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{j,k}(X_i)$.

Selanjutnya estimator densitas wavelet f pada level J adalah

$$\hat{f}_J(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{c}_{J,k} \phi_{J,k}(x), \quad (11)$$

dengan $\hat{c}_{J,k} = \langle \tilde{f}, \phi_{J,k} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{J,k}(X_i)$

Estimator ini merupakan estimator terbaik dari densitas f pada level resolusi J . Dengan menggunakan algoritma dekomposisi (7) maka estimator densitas f pada level J dengan menggunakan wavelet Haar dapat dinyatakan sebagai

$$\hat{f}_J(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{c}_k \phi_k(x) + \sum_{j=1}^{J-1} \sum_k \hat{d}_{j,k} \Psi_{j,k}(x), \quad (12)$$

dengan $\hat{c}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_k(X_i)$ dan $\hat{d}_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Psi_{j,k}(X_i)$.

Estimator Densitas dengan Wavelet Mulus

Estimasi fungsi densitas dengan menggunakan wavelet mulus dapat dikerjakan dengan cara yang sama pada estimasi densitas dengan wavelet Haar, yaitu dengan mengganti fungsi wavelet Haar dengan wavelet mulus yang bersesuaian seperti wavelet simetris, wavelet coiflet, dll.

Teorema 1 [3]. Diberikan data pengamatan independen $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ dari suatu distribusi dengan densitas f (tak diketahui), $f \in C^r(0,1)$ dengan r bilangan bulat positif terbesar sehingga

$$\int_0^1 x^k \Psi(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{jika } 0 \leq k \leq r-1 \\ 0 \neq K < \infty, & \text{jika } k = r \end{cases} . \text{ Jika } n, p \rightarrow \infty \text{ dan } \hat{f} \text{ estimator densitas pada level } 0$$

maka $IMSE(\hat{f}) = (1 + o(1))(n^{-1}p + A p^{-2r})$, dengan $A = \kappa^2(1-2^{-2r})^{-1} \int_0^1 (f^{(r)}(x))^2 dx$ dan $\kappa = \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} x^r \Psi(x) dx$.

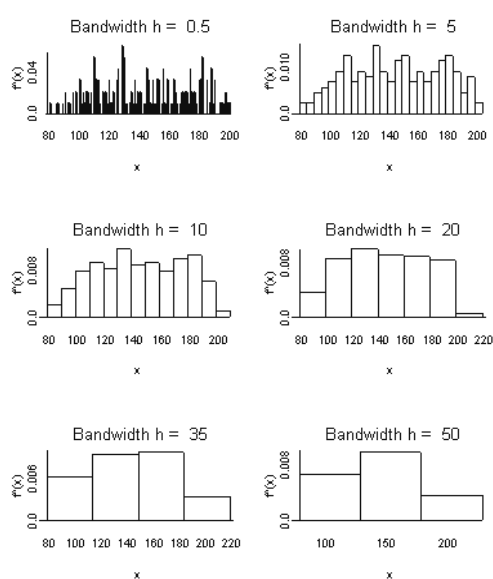
Dari teorema di atas menunjukkan bahwa untuk $n, p \rightarrow \infty$ $IMSE(\hat{f}) \rightarrow 0$. Karena tingkat kemulusan estimator wavelet \hat{f} ditentukan oleh parameter pemulus p , dengan p kecil memberikan estimasi fungsi yang sangat mulus dan p besar memberikan estimasi fungsi yang kurang mulus, maka dengan meminimalkan $IMSE(\hat{f})$ akan didapatkan p optimal. Dengan meminimalkan $IMSE(\hat{f})$ ini diperoleh $p_{opt} \propto n^{1/(2r+1)}$ dan $IMSE_{opt} \propto n^{-2r/(2r+1)}$. Selanjutnya jika p tetap ($p = 1$), maka parameter pemulus j_{opt} dapat dicari dengan mengganti $n^{1/(2r+1)} \propto 2^j$, sehingga diperoleh $j_{opt} \propto \frac{1}{2r+1} \log n$ dan $IMSE_{opt} \propto n^{-2r/(2r+1)}$. $IMSE_{opt}$ ini sama dengan $IMSE_{opt}$ pada estimator kernel. Jadi dapat disimpulkan bahwa dalam estimator wavelet mempunyai tingkat penurunan $IMSE$ yang sama dengan estimator kernel, tetapi lebih cepat menuju nol dari pada estimator deret Fourier. Kelebihan estimator wavelet, fungsi estimasinya dapat bersifat mulus maupun tidak mulus.

Contoh Aplikasi Estimasi Densitas Non Parametrik

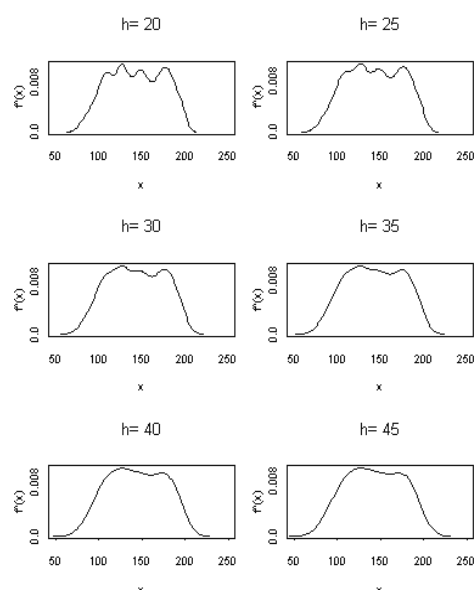
Berikut ini data pengukuran glukosa (diukur dalam milligram per deciliter) dari wanita berumur 21 tahun ke atas, berasal dari suku Indiana Pima dan tinggal di dekat Phoenix, Arizona. yang terkena diabetes. Datanya sebagai berikut :

195,97,128,137,189,92,143,149,164,140,121,105,176,171,199,154,167,184,139,134,131,158,112, 181, 168,144,107,125,125,115,150,140,148,117,80,124,103,124,112,148,145,151,144,187,129,167, 180, 177, 152,198,188,168,197,158,130,151,115,194, 184, 95,100,138, 100, 175,133,128, 129,155, 148, 78,197,166,118,119,102,90,111,171,180,109,100,136,122,160, 162,88,117,173,170,156, 152,163, 104, 179,129,128,109,109,196,109,85,162,134,181,179, 119, 184,113,155,101,106, 119,107, 146,144, 161,128,124,155,109,152,122,102,125,196, 189, 173,116,105,193,136,172,173,144,129,151, 181,95, 189, 180,104,158,135,125,84,163,145,128,90,186,187,176,111,181,174,138,112,97,179, 136,155, 145, 111,162,142,169,93,129,187,173,174,120,147,187,181,128,170 ([http://www.en.wikipedia.org/wiki/ illustration-of-density](http://www.en.wikipedia.org/wiki/illustration-of-density)).

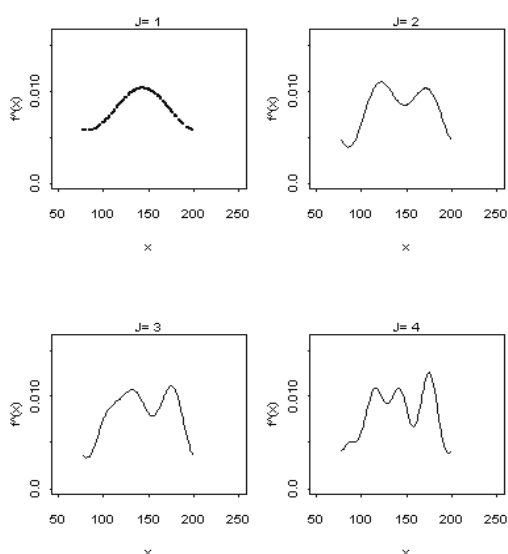
Data ini diestimasi fungsi densitasnya menggunakan metode histogram, metode kernel, metode deret Fourier dan metode wavelet dengan bantuan software S+for Windows. Gambar 1 dan 2 masing-masing merupakan hasil estimasi dengan histogram dan kernel Gauss dengan beberapa lebar bin berbeda, sedangkan gambar 3 dan 4 merupakan hasil estimasi dengan metode Fourier dan wavelet dengan level resolusi berbeda. Pada estimator histogram, lebar bin yang digunakan $h = 0,5; 5; 10; 20; 35$ dan 50 , sedangkan pada estimator kernel, lebar bin yang digunakan $h = 20; 25; 30; 35; 40$ dan 45 . Pada estimator Fourier level resolusi yang digunakan $J = 1; 2; 3; 4; 5$ dan 6 sedangkan pada estimator wavelet level resolusi yang digunakan $j = -1; -2; -3; -4$ dan -5 . Dari hasil estimasi terlihat bahwa estimator histogram dan kernel semakin lebar binnya semakin mulus fungsi estimasinya dan semakin kecil lebar binnya semakin kurang mulus fungsi estimasinya. Sedangkan dalam estimator Fourier dan wavelet semakin besar level resolusinya semakin kurang mulus fungsi estimasinya dan semakin kecil level resolusinya semakin mulus fungsi estimasinya.



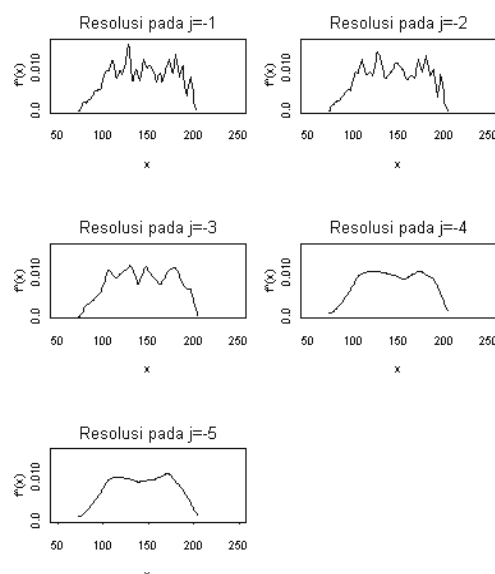
Gambar 1 : Estimasi densitas histogram



Gambar 2. Estimasi densitas kernel Gauss



Gambar 3. Estimasi Densitas Fourier



Gambar 4. Estimasi densitas wavelet

KESIMPULAN

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk mengestimasi fungsi densitas f , jika informasi model distribusi X tak diketahui maka f dapat diestimasi dengan menggunakan pendekatan non parametrik. Pendekatan non parametrik dapat dilakukan dengan estimator histogram yang selanjutnya berkembang menjadi estimator kernel, estimator deret Fourier dan estimator wavelet.

Ditinjau dari penurunan IMSE asimtotisnya, IMSE estimator wavelet lebih cepat menuju nol dari IMSE estimator deret Fourier, tetapi sama cepatnya dengan IMSE estimator kernel. Tetapi estimator wavelet mempunyai kelebihan dapat mengestimasi baik fungsi mulus maupun tidak mulus.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, Capital City Press, Philadelphia, 1992.
- [2]. Hall, P. and Patil, P., *On Wavelet Methods for Estimating Smooth Functions*, Bernoulli 1(1/2), 041-058, 1995.

- [3]. Hall,P. and Patil,P., *On the Choice of Smoothing Parameter, Threshold and Truncation in Non parametrik Regression by non-linier Wavelet Methods*,J.R.Statist.Soc.B (1996) 58, No.2, 361-377, 1996.
- [4]. Hardle,W., *Smoothing Techniques With Implementation in S*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5]. [Http://www.en.wikipedia.org/wiki/ illustration-of-density](http://www.en.wikipedia.org/wiki/illustration-of-density).
- [6]. Odgen, R.T., *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*, Birkhauser, Boston, 1997.
- [7]. Suparti, *Estimasi Fungsi Mulus dengan Metode Wavelet*, Tesis S-2, UGM, Yogyakarta, 1999.
- [8]. Vetterli,M. and Kovacevic,J.,*Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995.