***Berkala Fisika*** ***ISSN : 1410-9662***
*Vol. 5, No. 1, Januari 2002 hal 17 – 21*

# PEMODELAN MATRIKS SENSITIVITAS DISPERSI KECEPATAN GRUP GELOMBANG LOVE DENGAN METODE BEDA HINGGA

**Kusworo Adi[1], Yuliyanto G[2]**
1) *Laboratorium Instrumentasi dan Elektronika, Jurusan Fisika, Universitas Diponegoro*
2) *Laboratorium Geofisika, Jurusan Fisika, Universitas Diponegoro*

## Abstract

*It have been carried out calculation and analyzing of sensitivity matrices of Love waves group velocity dispersion curve by using finite-different method. Synthetic data used to model a single layer of crust. The model parameter that is shear wave velocity in dispersion relation is disturbed amount ±0,05 km/s.*

*The result of this study show that the highest resolution is 25-30 s. Its mean that in this period, the probability of Mohorovicic discontinuity is the highest too.*

*Keywords : sensitivity matrices, dispersion, finite-different*

## Intisari

*Telah dilakukan perhitungan dan analisis matriks sensitivitas dispersi kecepatan grup gelombang Love dengan metode beda hingga. Perhitungan dilakukan dengan data sintetik untuk model satu lapisan kerak dan dengan mengganggu paramater model yaitu kecepatan gelombang geser dalam persamaan dispersi sebesar* $\Delta\beta = \pm 0,05$ *km/s .*

*Hasil perhitungan menunjukkan bahwa dalam model kerak bumi satu lapis ini resolusi terbesar diperoleh pada periode 25-30 detik yang menunjukkan kebolehjadian keberadaan diskontinuitas Mohorovicic yang merupakan batas antara kerak dan mantel bumi.*

*Katakunci : matriks sensitivitas, dispersi, beda hingga*

### Pendahuluan

Turunan parsial merupakan hal yang sangat penting dalam penentuan modifikasi dari paramater model dan sangat berpengaruh terhadap konvergensi dari langkah inversi. Turunan parsial juga disebut sebagai matriks sensitivitas karena menunjukkan ketergantungan pengamatan terhadap perioda yang digunakan. Langkah praktis dalam perhitungan turunan parsial kecepatan gelombang permukaan terhadap parameter model adalah dengan metode pendekatan beda hingga bila fungsi yang diuji merupakan fungsi yang tidak linear. Salah satu fungsi yang tidak linear adalah dispersi gelombang permukaan yang banyak digunakan dalam penentuan struktur lapisan bumi. Metode lain dalam perhitungan turunan parsial kecepatan grup terhadap gelombang geser adalah dengan menggunakan metode yang diberikan oleh Rodi dkk [1] tetapi dalam hal ini diperlukan data dispersi kecepatan fase sedangkan kadang-kadang dari penelitian tidak diperoleh kecepatan fase.

Pada penelitian ini digunakan dispersi kecepatan grup gelombang Love karena gelombang Love ini dapat langsung diamati pada komponen *z* (*up-down*) pada seismogram tanpa harus merotasi komponen seperti perotasian komponen N-S menjadi komponen radial dan komponen E-W menjadi komponen tangensial.

### Gelombang Love

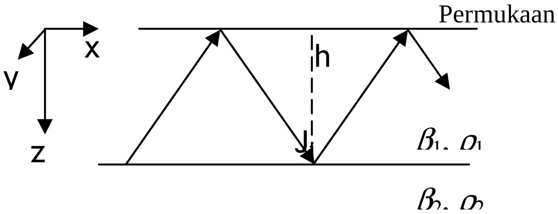
Gelombang Love terjadi dari interaksi gelombang-gelombang SH (gambar 1).

Menurut Stein [2] serta Lay dan Wallace [3], bila lapisan mempunyai ketebalan *h* dengan kecepatan $\beta_1$ terletak pada suatu medium setengah ruang tak berhingga dengan kecepatan yang lebih tinggi $\beta_2$, pergeseran total dalam lapisan medium merupakan penjumlahan pergeseran gelombang yang ke atas (*upgoing)* dan ke bawah (*downgoing)* :

$$u_y^-(x,z,t) = B_1 e^{(i(\omega t - k_x x + k_x s_1 z))} + B_2 e^{(i(\omega t - k_x x + k_x s_2 z))}, \quad ...(1)$$

sedangkan pada medium setengah ruang takberhingga hanya dibutuhkan satu suku persamaan, yaitu :

$$u_y^-(x,z,t) = B' e^{(i(\omega t - k_x x - k_x s_2 z))} \quad \ldots(2)$$




Gambar 1 Suatu lapisan terletak di atas medium setengah ruang tak berhingga. Jika $\beta_1 < \beta_2$ maka akan terjadi gelombang Love.

Energi gelombang dianggap terjebak dekat dengan permukaan, tidak merambat ke dalam medium setengah ruang tak berhingga jika $e^{(-ik_x s_2 z)}$ menjadi eksponensial yang real negatif dan berkurang ketika $z \to \infty$. Hal ini akan terjadi jika kecepatan gelombang Love lebih kecil daripada kecepatan gelombang S dalam medium setengah ruang tak berhingga, sehingga diperoleh :

$$s_2 = \sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1} = -i\sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta^2}} = -is^* . \quad \ldots(3)$$

Kondisi $c < \beta_2$ terjadi ketika gelombang SH pada lapisan yang lebih atas datang pada bidang batas dengan sudut yang lebih besar daripada sudut kritis, sehingga gelombang Love dapat dipandang sebagai hasil interferensi gelombang SH yang terjebak dalam lapisan.

Amplitudo-amplitudo $B_1$, $B_2$ dan $B'$ dapat diperoleh dari syarat batas pada permukaan bebas dan pada pada bidang batas antara lapisan dan setengah ruang. Pada permukaan bebas, *stress* akan sama dengan nol yang dapat diberikan sebagai :

$$\sigma_{yz}(x,0,t) = \mu_1\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)(x,0,t) , \quad \ldots(4)$$

sehingga diperoleh $B_1 = B_2$. Pada bidang batas, pergeseran akan kontinu sehingga :

$$B_1\left[e^{(-ik_x s_1 h)} + e^{(-ik_x s_1 h)}\right] = B' e^{(-ik_x s_2 h)} .$$

$$= \mu_1(iks_1)(B_2 - B_1)e^{(i(\omega t - k_x x))} = 0 . \quad \ldots(5)$$

Komponen *stress* $\sigma_{yz}$ juga harus kontinu pada bidang batas sehingga :

$$\mu_1(-ik_x s_1)B_1\left[e^{(-ik_x s_1 h)} - e^{(ik_x s_1 h)}\right] = \mu_2(-ik_x s_2)B'\left[e^{(-ik_x s_2 h)}\right]. \quad \ldots(6)$$

Dengan mengkombinasikan eksponensial-eksponensial kompleksnya, maka persamaan (5) dan persamaan (6) dapat dituliskan kembali sebagai :

$$2B_1 \cos(k_x s_1 h) = B' e^{(-ik_x s_2 h)} , \quad \ldots(7a)$$

$$2i\mu_1 s_1 B_1 \sin(k_x s_1 h) = -\mu_2 s_2 B' \sin(-ik_x s_2 h) . \quad \ldots(7b)$$

Dengan membagi persamaan (7b) dengan (7a) maka akan diperoleh :

$$\tan(k_x s_1 h) = \frac{-\mu_2 s_2}{i\mu_1 s_1} = \frac{\mu_2 s_2{}^*}{i\mu_1 s_1}, \quad \ldots(8)$$

yang memberikan hubungan antara bilangan gelombang *k* dan kecepatan gelombang *c* dalam arah horizontal yang harus dipenuhi sehingga gelombang Love ini ada. Dari hubungan $c=\omega/k$ tampak bahwa kecepatan horizontal dari gelombang Love yang terjadi mempunyai bilangan-bilangan gelombang horizontal dan frekuensi-frekuensi sudut yang spesifik. Untuk suatu periode atau frekuensi sudut tertentu, gelombang Love hanya dapat mempunyai kecepatan-kecepatan horizontal atau bilangan gelombang tertentu. Frekuensi-frekuensi yang berbeda mempunyai kecepatan yang berbeda dan gejala ini disebut dengan dispersi. Persamaan (8) diatas memberikan kecepatan *c* sebagai suatu fungsi peubah ω atau *k* disebut sebagai relasi dispersi atau persamaan periode.

**Dispersi Gelombang Permukaan**

Semua gelombang permukaan, kecuali gelombang Rayleigh dalam medium setengah ruang tak berhingga isotropis, menunjukkan fenomena dispersi dengan kecepatan sepanjang permukaan bergantung pada frekuensinya [2]. Hampir semua sumber seismik menimbulkan gelombang-gelombang yang terdiri dari suatu spektrum frekuensi yang kontinu dengan komponen harmonik yang masing-masing mempunyai sebuah kecepatan $c(\omega)$ yang disebut dengan kecepatan fase. Ketika suatu spektrum frekuensi muncul, gelombang-gelombang tersebut berinterferensi dan menghasilkan pola-pola konstruktif dan destruktif yang mempengaruhi gerakan tanah total. Pola-pola interferensi konstruktif berkelakuan sebagai paket-paket gelombang yang merambat sebagai gangguan sepanjang permukaan yang dikenal sebagai kecepatan grup $U(\omega)$.

Menurut Lay dan Wallace [3] bila dua gelombang harmonik dengan amplitudo yang sama tetapi dengan frekuensi yang berbeda sedikit berinterferensi maka persamaan pergeseran totalnya dapat diberikan sebagai :

$$u = \cos(\omega' t + k' x) + \cos(\omega'' t + k'' x)\,, \qquad \ldots(9)$$

dengan $k'=\omega'/c'$ dan $k''=\omega''/c''$ adalah masing-masing bilangan gelombang, $\omega'$ dan $\omega''$ adalah frekuensi masing-masing gelombang, serta $c'$ dan $c''$ adalah kecepatan fase masing-masing gelombang harmonik. Kemudian didefinisikan $\omega$ sebagai rata-rata dari $\omega''$ dan $\omega'$ sehingga $\omega' + \delta\omega = \omega = \omega'' - \delta\omega$, dan $k=\omega/c$ sehingga $k' + \delta k = k = k'' - \delta k$ dengan $\delta\omega << \omega$ dan $\delta k << k$. Dengan menggunakan aturan cos: $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, dan kemudian menyisipkannya ke dalam persamaan (9) maka diperoleh :

$$u = \cos(\omega t - kx)\cos(\delta\omega t - \delta k x)\,, \qquad \ldots(10)$$

yang merupakan perkalian dari dua cosinus, dengan suku kedua berubah lebih lambat daripada suku pertama.

Amplop (*envelope*) sinyal termodulasi merambat dengan suatu kecepatan yang berbeda dari kecepatan fase dari suku harmonik rata-rata *c*, yang didefinisikan sebagai kecepatan grup:

$$U = \frac{\delta\omega}{\delta k}\,. \qquad \ldots(11)$$

Pada limit $\delta\omega$ dan $\delta k \to 0$, maka :

$$U = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k\frac{dc}{dk} = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}\,. \qquad \ldots(12)$$

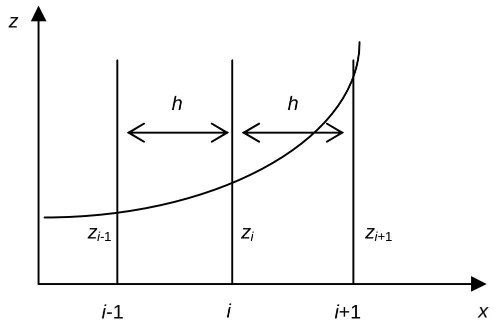
Tampak bahwa bahwa kecepatan grup bergantung kepada kecepatan fase dan perubahan kecepatan fase terhadap bilangan gelombangnya. Jika $\frac{dc}{dk} = 0$ maka kecepatan fase sama dengan kecepatan grup. Secara umum, pada material bumi kecepatan fase berkurang secara monoton terhadap frekuensi, sehingga $\frac{dc}{dk} < 0$ dan $U < c$.

**Metode Beda Hingga**

Metode beda hingga ini merupakan metode pendekatan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial [5]. Bila operator *D* mewakili *d/dx* maka pada *z-i* dapat diperoleh :

$$Dz_i \approx (-z_{i-1} + z_{i+1}) / (2h), \qquad \ldots(13)$$

seperti yang ditunjukkan pada gambar 3.




Gambar 3 Ilustrasi metode beda hingga secara sederhana

## Matriks Sensitivitas

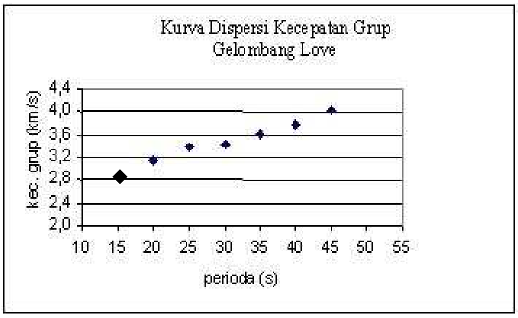
Pada matriks sensitivitas yang diperoleh dengan metode pendekatan beda hingga, perubahan kecil kecepatan grup pada perioda tertentu yang disebabkan oleh perubahan kecil pada parameter model *m* yaitu $\beta$ dan *h* digunakan sebagai pendekatan untuk memperoleh turunan parsial kecepatan grup terhadap $\beta$ dan *h*. Skema beda pusat (c*entral difference scheme*) yang sering digunakan dalam beberapa penelitian adalah pendekatan yang diberikan oleh Rodi dkk [1], yaitu :

$$\frac{\partial U_i}{\partial m_j} \cong \frac{\Delta U_{ij}}{2\Delta m_j} \quad , \qquad \ldots(14)$$

dengan $\Delta U$ adalah selisih antara kecepatan-kecepatan grup untuk parameter model *m* dengan *m* diubah sebesar $+\Delta m$ dan $-\Delta m$ pada masing-masing lapisan model.

## Hasil Perhitungan dan Analisis

Pada penelitian ini digunakan data sintetik (gambar 3) yang merujuk pada data yang digunakan oleh Dorman dan Ewing [4] dengan model kerak bumi satu lapis. Pada model yang digunakan tersebut ketebalan kerak bumi adalah 25 km.




Gambar 3 Kurva dispersi kecepatan grup gelombang Love yang digunakan dalam penelitian

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_T \approx \frac{\Delta U}{2\Delta\beta} = \begin{bmatrix} 1{,}1206 & -0{,}1684 \\ 1{,}4751 & -0{,}3630 \\ 1{,}7070 & -0{,}3953 \\ 1{,}6958 & -0{,}2527 \\ 1{,}4951 & -0{,}0255 \\ 1{,}2382 & 0{,}1941 \\ 1{,}0017 & 0{,}3714 \end{bmatrix}$$

Gambar 4 Matriks sensitivitas hasil perhitungan

Perhitungan turunan parsial kecepatan grup terhadap kecepatan gelombang Love pada penelitian ini dilakukan dengan menggunakan persamaan (14) dengan $\Delta\beta = \pm\, 0{,}05$ km/s untuk lapisan kerak dan mantel pada perioda-perioda seperti pada gambar 4. Dari gambar 4 tampak bahwa nilai terbesar pada matriks sensitivitas untuk lapisan kerak bumi (kolom pertama) terletak pada periode 25 detik sedangkan nilai tertinggi pada lapisan mantel bumi (kolom kedua) adalah pada periode 45 detik. Berdasarkan kecenderungan kurva dispersi tersebut kebolehjadian keberadaan diskontinuitas Mohorovicic sebagai batas kerak dan mantel bumi terletak pada kedalaman antara 25-30 km. Untuk memperoleh resolusi yang lebih tinggi maka data yang digunakan sebaiknya mempunyai interval yang lebih rapat atau bila tidak diperoleh data yang diinginkan maka dapat digunakan metode interpolasi. Pada kolom kedua dari matriks sensitivitas tampak bahwa nilai negatif pada lapisan mantel terjadi sampai dengan periode 35 detik yang dapat diartikan bahwa keberadaan lapisan mantel mempunyai kebolehjadian pada kedalaman setelah 35 km.

## Kesimpulan

Dari penelitian ini dapat diperoleh kesimpulan bahwa berdasarkan matriks sensitivitas dengan pendekatan beda hingga dengan model lapisan bumi seperti yang diberilkan oleh Dorman dan Ewing diperoleh kesimpulan bahwa resolusi model terbesar gelombang Love terdapat pada perioda 20-35 detik untuk lapisan kerak bumi dan pada perioda 40-45 detik pada lapisan mantel, yang sesuai dengan model yang digunakan oleh Dorman dan Ewing.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Rodi, W, L., P. Glover, R.M.C. Li, and S.S. Alexander, 1975, A Fast, Accurate Methode for Computing Group Velocity Partial Derivatives for Rayleigh and Love Waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 65, 1105-1114

[2] Stein, S., 1991, *Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure*, Northwestern University

[3] Lay, T. and T.C. Wallace, 1995, *Modern Global Seismology,* Academic Press, San Diego

[4] Dorman, J., and Ewing, M., 1962, Numerical Inversion of Seismic Surface Wave Dispersion Data and Crust-Mantle Structure in The New York-Pennsylvania area, *J. Geophys. Res*., 67, 5227-5241

[5] Lindfield, G. and J. Penny, 1995, *Numerical Methods Using MATLAB*, Ellish Horwood, Singapore