RESULTAN DARI POLINOMIAL DENGAN n - *INDETERMINATE*

Harjito[1)], R. Heri SU[2)], dan Karuniawati DR[3)]
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. Let $f, g \in K[x]$ be polynomials where K is a field. To determine whether two polynomials have a common factor without doing any divisions in $K[x]$ can be seen from its resultant, that is determinant from Sylvester matrix. Two polynomials will have a common factor if and only if its resultant is zero. If its resultant isn't zero so two polynomials have not a common factor. Wants to be look for resultant $f_1, \cdots, f_s$ where $s \geq 3$ in $C[x_1, \cdots, x_n]$ where C is the set of all complex numbers. To make the easy resultant computations is used by maple 8.

Keywords: field, Sylvester matrix, resultant.

1. PENDAHULUAN

Misalkan akan dicari apakah dua polinomial $f, g \in K[x]$ mempunyai faktor persekutuan, artinya terdapat polinomial $h \in K[x]$ dengan derajat positif yang membagi f dan g. Salah satu cara adalah dengan memfaktorkan f dan g menjadi tak tereduksi. Sayangnya, pemfaktoran membutuhkan proses yang lama. Metode yang lebih efisien untuk menghitung Pembagi Persekutuan Terbesar (PPT) dari f dan g adalah dengan menggunakan algoritma Euclidean. Kekurangannya adalah algoritma Euclidean memerlukan pembagian dalam $K[x]$. Oleh karena itu, akan dicari cara untuk menentukan apakah terdapat faktor persekutuan tanpa melakukan pembagian dalam $K[x]$.

Resultan yang merupakan determinan dari matriks Sylvester mempunyai peranan penting dalam teori eliminasi. Dengan bantuan resultan dapat diketahui apakah dua polinomial atau lebih mempunyai faktor persekutuan.

2. PEMBAHASAN

Lemma 2.1

Misalkan $f, g \in K[x]$ adalah polinomial dengan $\deg(f) = l > 0$ dan $\deg(g) = m > 0$. Polinomial f dan g mempunyai faktor persekutuan jika dan hanya jika ada polinomial $A, B \in K[x]$ sedemikian sehingga:

1. A dan B keduanya tidak nol.
2. deg $(A) \leq m - 1$ dan deg $(B) \leq l - 1$.
3. $Af + Bg = 0$.

Bukti.

$(\Rightarrow)$ Misalkan f dan g mempunyai faktor persekutuan $h \in K[x]$. Maka $f = hf_1$ dan $g = hg_1$, dengan $f_1, g_1 \in K[x]$. Sehingga $\deg(f_1) \leq l - 1$, dan $\deg(g_1) \leq m - 1$. Maka

$$g_1 f + (-f_1)g = g_1.hf_1 - f_1.hg_1 = 0$$

Dengan demikian $A = g_1$ dan $B = -f_1$. Jadi, ketiga sifat dipenuhi.

$(\Leftarrow)$ Misalkan A dan B memenuhi ketiga sifat di atas. Dengan bagian 1, misalkan $B \neq 0$. Andaikan f dan g tidak mempunyai faktor persekutuan, maka PPTnya adalah 1, sehingga dapat ditemukan polinomial $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in K[x]$ sedemikian sehingga $\widetilde{A}f + \widetilde{B}g = 1$. Kalikan dengan B dan gunakan $Bg = -Af$:

$$B = (\widetilde{A}f + \widetilde{B}g)B = (\widetilde{A}B - \widetilde{B}A)f$$

Karena $B \neq 0$, persamaan ini menunjukkan bahwa B mempunyai derajat paling sedikit l, kontradiksi dengan bagian 2. Jadi, f dan g mempunyai faktor persekutuan dengan derajat positif. ■

Lemma 2.1 merupakan salah satu cara untuk menentukan apakah ada faktor persekutuan dari dua polinomial $f, g \in K[x]$ tanpa melakukan pembagian dalam lapangan *K*. Akan tetapi, cara ini mungkin belum memuaskan. Dari Lemma 2.1 kemudian menimbulkan pertanyaan apakah keberadaan *A* dan *B* benar-benar diperlukan. Untuk menjawab pertanyaan keberadaan *A* dan *B* dilakukan dengan mengubah *Af + Bg = 0* menjadi sistem persamaan linear. Tulis

$$A = c_0 + \cdots + c_{m-1}x^{m-1}$$
$$B = d_0 + \cdots + d_{l-1}x^{l-1},$$

dengan $l+m$ koefisien : $c_0, \cdots, c_{m-1}, d_0, \cdots, d_{l-1}$ tidak diketahui. Selanjutnya akan dicari $c_i, d_i \in K$, yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga dipenuhi persamaan

$$Af + Bg = 0 \qquad (2.1)$$

Sehingga secara otomatis *A* dan *B* diperlukan dalam lemma 1.

Untuk mendapatkan sistem persamaan linear, tulis *f* dan *g* sebagai berikut:

$$f = a_0 + \cdots + a_l x^l, \qquad a_l \neq 0$$
$$g = b_0 + \cdots + b_m x^m, \qquad b_m \neq 0$$

dengan $a_i, b_i \in K$. Substitusikan *f*, *g*, *A*, dan *B* ke persamaan (2.1) dan bandingkan dengan koefisien dari pangkat *x*, maka diperoleh sistem persamaan linear dengan c_i, d_i tidak diketahui dan kofisien a_i, b_i dalam *K*:

$$\begin{array}{llll}
a_l c_{m-1} + b_m d_{l-1} & = 0 & \text{koefisien dari } x^{l+m-1} \\
a_l c_{m-2} + a_{l-1}c_{m-1} + b_m d_{l-2} + b_{m-1}d_{l-1} & = 0 & \text{koefisien dari } x^{l+m-2} \\
\ddots \qquad\qquad \ddots & \vdots & \\
a_0 c_0 + b_0 d_0 & = 0 & \text{koefisien dari } x^0
\end{array}$$

(2.2)

Sehingga didapat sistem persamaan linier homogen dengan $l+m$ persamaan dan $l+m$ variabel yang tidak diketahui. Sistem persamaan linier homogen di atas mempunyai solusi bukan nol jika dan hanya jika determinan matriks koefisiennya sama dengan nol.

Definisi 2.1

Misalkan polinomial $f, g \in K[x]$ dengan derajat positif, yaitu:

$$f = a_0 + \cdots + a_l x^l, \quad a_l \neq 0 \quad \text{dan}$$
$$g = b_0 + \cdots + b_m x^m, \quad b_m \neq 0.$$

Maka matriks Sylvester dari *f* dan *g* terhadap *x,* ditulis $Syl(f, g, x)$ adalah matriks koefisien dari sistem persamaan linier yang diberikan di persamaan (2.2). Jadi, $Syl(f, g, x)$ adalah matriks bujur sangkar berukuran $(l+m)\times(l+m)$:

$$Syl(f,g,x) = \begin{bmatrix}
a_l & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\
a_{l-1} & a_l & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\
\vdots & a_{l-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_0 & \vdots & \ddots & a_l & b_0 & \vdots & \ddots & b_m \\
0 & a_0 & \cdots & a_{l-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{m-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0
\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m\ kolom} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{l\ kolom}$$

Resultan dari *f* dan *g* terhadap *x*, ditulis $\mathrm{Res}(f, g, x)$ adalah determinan dari matriks Sylvester. Dengan demikian,

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = \det\left(Syl(f, g, x)\right)$$

Dari definisi ini didapatkan sifat-sifat resultan. Selanjutnya suatu polinomial disebut polinomial integer jika semua koefisiennya integer.

Proposisi 2.1. Jika polinomial $f, g \in K[x]$ dengan derajat positif, maka:

1. Res $(f, g, x) \in K$ adalah polinomial integer dengan koefisien dari *f* dan *g*.
2. *f* dan *g* mempunyai faktor persekutuan dalam $K[x]$ jika dan hanya jika $\mathrm{Res}(f, g, x) = 0$.

Bukti.

Formula standar untuk determinan matriks $s \times s$ $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le s}$ adalah

$$\det(A) = \sum_{\substack{\sigma \text{ permutasi} \\ \text{dari } \{1,\ldots,s\}}} Sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)} \cdots a_{s\sigma(s)}$$

dimana *Sgn(σ)* adalah +1 jika σ adalah permutasi genap dan -1 adalah permutasi ganjil. Hal ini menunjukkan bahwa determinannya merupakan polinomial integer, dan pernyataan pertama proposisi 2.3 terbukti.

Pernyataan kedua dibuktikan sebagai berikut: Res $(f, g, x) = 0 \Leftrightarrow$ matriks koefisien dari persamaan (2) mempunyai determinan nol $\Leftrightarrow$ persamaan (2) mempunyai solusi tidak nol. Ini ekuivalen dengan keberadaan A dan B pada lemma 1 sedemikian sehingga $Af + Bg = 0$, dan lemma 1 melengkapi bukti dari proposisi tersebut. Jadi, terbukti f dan g mempunyai faktor persekutuan dalam $K[x]$. ■

Suatu kesulitan menggunakan resultan adalah determinan matriks yang besar sulit dihitung. Akan tetapi, seiring dengan perkembangan teknologi, banyak software yang dapat digunakan untuk menghitung determinan matriks yang besar sekalipun.

Untuk menghubungkan resultan dengan eliminasi, akan ditunjukkan dengan menghitung resultan dari polinomial $f = x^2 - y^2 + 2$ dan $g = xy - 4$. Dengan menyatakan f dan g sebagai polinomial dalam x dengan koefisien polinomial dalam y didapat:

$$\mathrm{Res}(f,g,x) = \begin{vmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & -4 & y \\ -y^2+2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 - y^4 + 2y^2.$$

Umumnya, jika f dan g adalah polinomial dalam $K[x, y]$ dengan x mempunyai pangkat positif, maka dapat dihitung $\mathrm{Res}(f, g, x)$ dengan cara yang sama. Karena koefisiennya polinomial dalam y, proposisi 2.3 menjamin bahwa $\mathrm{Res}(f, g, x)$ adalah polinomial dalam y. Jadi, jika diberikan $f, g \in K[x, y]$, maka dapat digunakan resultan untuk mengeliminasi x.

Proposisi 2.2. Jika polinomial $f, g \in K[x]$ dengan derajat positif, maka terdapat polinomial $A, B \in K[x]$ sedemikian sehingga

$$Af + Bg = \mathrm{Res}(f, g, x).$$

Selanjutnya, koefisien A dan B adalah polinomial integer dengan koefisien dari f dan g.

Bukti.

Definisi dari resultan didasarkan pada persamaan $Af + Bg = 0$. Dalam bukti ini akan diperoleh metode yang sama untuk persamaan $\tilde{A}f + \tilde{B}g = 1$.

Jika $\mathrm{Res}(f, g, x) = 0$, pilih $A = B = 0$ sehingga $Af + Bg = 0$. Jadi diasumsikan $\mathrm{Res}(f, g, x) \neq 0$. Karena $\mathrm{Res}(f, g, x) \neq 0$ maka f dan g tidak mempunyai faktor persekutuan dalam $k[x]$, atau $\mathrm{PPT}(f, g) = 1$ sehingga $\tilde{A}f + \tilde{B}g = 1$.

Misalkan

$$f = a_0 + \cdots + a_l x^l, \qquad a_l \neq 0$$

$$g = b_0 + \cdots + b_m x^m, \qquad b_m \neq 0$$

$$\tilde{A} = c_0 + \cdots + c_{m-1} x^{m-1}$$

$$\tilde{B} = d_0 + \cdots + d_{l-1} x^{l-1}$$

dimana koefisien $c_0, \cdots, c_{m-1}, d_0, \cdots, d_{l-1}$ dalam K dan $c_0, \cdots, c_{m-1}, d_0, \cdots, d_{l-1}$ tidak diketahui. Jika formula di atas disubstitusi ke $\tilde{A}f + \tilde{B}g = 1$ dan dibandingkan koefisien dari derajat x, maka didapatkan sistem persamaan linear dengan c_i, d_i tidak diketahui dan koefisien a_i, b_i dalam K sebagai berikut:

$$\begin{array}{llll} a_l c_{m-1} & + \; b_m d_{l-1} & = 0 & \text{koefisien dari } x^{l+m-1} \\ a_l c_{m-2} + a_{l-1} c_{m-1} & + \; b_m d_{l-2} + b_{m-1} d_{l-1} & = 0 & \text{koefisien dari } x^{l+m-2} \\ \ddots & \ddots & \vdots & \\ a_0 c_0 & + \; b_0 d_0 & = 1 & \text{koefisien dari } x^{0} \end{array}$$

(2.3)

Persamaan di atas sama dengan persamaan (2.2) kecuali di ruas sebelah kanan dari persamaan terakhir. Oleh karena itu, matriks koefisien dari persamaan di atas (2.3) adalah matriks Sylvester dari f dan g. Karena $\mathrm{Res}(f, g, x) \neq 0$ maka persamaan (2.3) mempunyai solusi tunggal dalam lapangan K.

Sehingga,

$$\mathrm{Res}\,(f,g,x)=\det\begin{bmatrix} a_l & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{l-1} & a_l & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{l-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & \vdots & \ddots & a_l & b_0 & \vdots & \ddots & b_m \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{l-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{bmatrix}.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m\ kolom}\quad\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{l\ kolom}$$

Dengan cara Cramer dapat dicari c_i dan d_i, yaitu:

$$c_{m-1}=\frac{1}{\mathrm{Res}(f,g,x)}=\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_l & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{l-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & a_l & b_0 & \vdots & \ddots & b_m \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{l-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

.

Karena elemen-elemen dari determinannya adalah polinomial integer, maka

$$c_{m-1}=\frac{\text{polinomial integer } a_i,b_i}{\mathrm{Res}(f,g,x)}.$$

Analog untuk c_i dan d_i yang lain. Karena $\widetilde{A}=c_0+\cdots+c_{m-1}x^{m-1}$, maka

$$\widetilde{A}=\frac{1}{\mathrm{Res}(f,g,x)}A,$$

dengan $A\in K[x]$ dan koefisien A adalah polinomial integer dalam a_i,b_i. Analog $\widetilde{B}$ dapat ditulis :

$$\widetilde{B}=\frac{1}{\mathrm{Res}(f,g,x)}B,$$

dengan $B\in k[x]$ dan koefisien B adalah polinomial integer a_i,b_i.

Karena $\widetilde{A}f+\widetilde{B}g=1$, maka

$$Af+Bg=\mathrm{Res}(f,g,x).$$

Sehingga proposisi 2.4 terbukti. ■

Definisi 2.2

Misalkan diberikan polinomial $f,g\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ dengan derajat positif dalam x_1 yaitu :

$$\begin{aligned} f&=a_0+\cdots+a_lx_1^l, & a_l&\neq 0 \\ g&=b_0+\cdots+b_mx_1^m, & b_m&\neq 0 \end{aligned}, \qquad (4)$$

dimana $a_i,b_i\in K[x_2,\cdots,x_n]$, dan resultan dari f dan g terhadap x_1 didefinisikan sebagai :

$$\mathrm{Res}\,(f,g,x_1)=\det\begin{bmatrix} a_l & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{l-1} & a_l & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{l-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & \vdots & \ddots & a_l & b_0 & \vdots & \ddots & b_m \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{l-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{bmatrix}.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m\ kolom}\quad\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{l\ kolom}$$

Proposisi 2.3. Jika $f,g\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ mempunyai derajat positif dalam x_1, maka :

1. $\mathrm{Res}(f,g,x_1)$ adalah anggota ideal eliminasi tingkat $1=\langle f,g\rangle\cap K[x_2,\cdots,x_n]$.
2. $\mathrm{Res}(f,g,x_1)=0$ jika dan hanya jika f dan g mempunyai faktor persekutuan dalam $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ dengan derajat positif dalam x_1.

Bukti.

Jika f, g ditulis dalam suku x_1, maka koefisien a_i, b_i terletak dalam $K[x_2,\cdots,x_n]$. Karena resultan merupakan polinomial integer dalam a_i,b_i dan $a_i,b_i\in K[x_2,\cdots,x_n]$ maka $\mathrm{Res}(f,g,x_1)\in K[x_2,\cdots,x_n]$. Karena $Af+Bg=\mathrm{Res}\,(f,g,x_1)$, dengan A dan B adalah polinomial dalam x_1 yang koefisiennya juga polinomial integer dalam a_i,b_i, maka

$$A,B\in K[x_2,\cdots,x_n][x_1]=K[x_1,\cdots,x_n]$$

sehingga $Af+Bg=\mathrm{Res}(f,g,x_1)$ menyatakan $\mathrm{Res}(f,g,x_1)\in\langle f,g\rangle$. Karena $\mathrm{Res}(f,g,x_1)\in K[x_2,\cdots,x_n]$ dan $\mathrm{Res}(f,g,x_1)\in\langle f,g\rangle$, maka

$\text{Res}(f, g, x_1) \in \langle f, g \rangle \cap K[x_2, \cdots, x_n]$.

Sehingga bagian 1 dari Proposisi 2.3 terbukti.

Untuk membuktikan bagian 2 akan digunakan Proposisi 2.1 untuk menjelaskan mengapa resultan bernilai nol jika terdapat suatu faktor persekutuan. Sebelumnya telah dibahas polinomial dalam satu variabel dengan koefisien dalam suatu lapangan *K*. Karena *f* dan *g* adalah polinomial dalam x_1 dengan koefisien dalam $K[x_2, \cdots, x_n]$, maka Proposisi 2.1 berlaku untuk $f, g \in K(x_2, \cdots, x_n)[x_1]$. Dengan Proposisi 2.1 $\text{Res}(f, g, x_1) = 0$ jika dan hanya jika *f* dan *g* mempunyai faktor persekutuan dalam $K(x_2, \cdots, x_n)[x_1]$ dengan derajat positif dalam x_1. Selanjutnya diperoleh *f* dan *g* mempunyai faktor persekutuan dalam $K[x_1, \cdots, x_n]$ dengan derajat positif dalam x_1. Bagian 2 dari Proposisi 2.3 terbukti. ■

Dalam himpunan bilangan kompleks, dua polinomial dalam *C*[*x*] mempunyai faktor persekutuan jika dan hanya jika *f* dan *g* mempunyai akar persekutuan, sehingga diperoleh akibat dari Proposisi 2.3.

Akibat 2.1

Jika $f, g \in C[x]$, maka $\text{Res}(f, g, x) = 0$ jika dan hanya jika *f* dan *g* mempunyai akar persekutuan dalam C.

Proposisi 2.4. Misalkan $f, g \in C[x_1, \cdots, x_n]$ dengan $f = a_0 + \cdots + a_l x_1^l$, $a_l \neq 0$ dan $g = b_0 + \cdots + b_m x_1^m$, $b_m \neq 0$ dengan $a_l, b_m \in C[x_2, \cdots, x_n]$.

Jika Res $(f, g, x_1) \in C[x_2, \cdots, x_n]$ sama dengan nol pada $(c_2, \cdots, c_n) \in C^{n-1}$ maka:

1. $a_l = 0$ atau $b_m = 0$ pada $(c_2, \cdots, c_n)$,
2. terdapat $c_1 \in C$ sedemikian sehingga *f* dan *g* sama dengan nol pada $(c_1, \cdots, c_n) \in C^n$.

Bukti.

Misalkan $c = (c_2, \cdots, c_n)$ dan $f(x_1, c) = f(x_1, c_2, \cdots, c_n)$. Akan ditunjukkan bahwa $f(x_1, c)$ dan $g(x_1, c)$ mempunyai akar persekutuan ketika $a_l(c) \neq 0$ dan $b_m(c) \neq 0$. Untuk membuktikan ini tulis

$$\begin{array}{l} f(x_1,c) = a_0(c) + \cdots + a_l(c)x_1^l, \quad a_l(c) \neq 0 \\ g(x_1,c) = b_0(c) + \cdots + b_m(c)x_1^m, \quad b_m(c) \neq 0 \end{array}, \qquad (2.5)$$

dan $h = \text{Res}(f, g, x_1)$ pada *c*. Sehingga jika dihitung determinan yang diberikan oleh *h* pada titik *c* diperoleh

$$0 = h(c) = \det \begin{bmatrix} a_l(c) & & & b_m(c) & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_l(c) & \vdots & & b_m(c) \\ a_0(c) & & \vdots & b_0(c) & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_0(c) & & & b_0(c) \end{bmatrix}. \qquad (2.6)$$

Dari persamaan (2.5), resultan dari $f(x_1, c)$ dan $g(x_1, c)$ terhadap x_1 adalah determinan seperti diperlihatkan pada persamaan (2.6), sehingga

$$\text{Res}(f(x_1, c), g(x_1, c), x_1) = h(c) = 0$$

Dengan Akibat 1 berarti $f(x_1, c)$ dan $g(x_1, c)$ mempunyai akar persekutuan. ■

Teorema 2.1 (Teorema Perluasan untuk Dua Polinomial).

Misalkan $I = \langle f, g \rangle \subset C[x_1, \cdots, x_n]$, I_1 adalah ideal eliminasi tingkat 1 dari *I*, $a_l, b_m \in C[x_2, \cdots, x_n]$ seperti dalam (4) dan solusi parsial $(c_2, \cdots, c_n) \in V(I_1)$. Jika $(c_2, \cdots, c_n) \notin V(a_l, b_m)$, maka terdapat $c_1 \in C$ sedemikian sehingga $(c_1, \cdots, c_n) \in V(I)$.

Bukti.

Misalkan $c = (c_2, \cdots, c_n)$. Dari proposisi 2.6 diketahui bahwa Res $(f, g, x_1) \in I_1$ sehingga resultan sama dengan nol pada solusi parsial *c*. Jika $a_0 = 0$ atau $b_0 = 0$

pada c, maka berdasarkan Proposisi 2.4 diperlukan keberadaan c_1. Sayangnya, hipotesis pada c hanya mengijinkan $a_l(c)=0$ atau $b_m(c)=0$. Misal $a_l(c)\neq 0$ dan $b_m(c)=0$, maka $g(x_1,c)$ mempunyai derajat dalam x_1 kurang dari m. Dalam hal ini determinan persamaan (6) mempunyai ukuran $(l+m)\times(l+m)$ yang terlalu besar untuk menjadi resultan dari $f(x_1,c)$ dan $g(x_1,c)$.

Karena solusi $V(f,g)$ bergantung pada ideal $\langle f,g\rangle$, maka dapat digunakan basis yang berlainan dari ideal $\langle f,g\rangle$ ketika $a_l(c)\neq 0$ dan $b_m(c)=0$. Jika N sebarang integer positif, maka

$$\begin{aligned}\left\langle f,g+x_1^N f\right\rangle &= pf+q\left(g+x_1^N f\right), \quad p,q\in K[x_1,\cdots,x_n]\\ &= pf+q(g)+\left(qx_1^N\right)f, \quad qx_1^N\in K[x_1,\cdots,x_n]\\ &= \left(p+qx_1^N\right)f+q(g), \quad p+qx_1^N\in K[x_1,\cdots,x_n]\\ &= rf+qg, \quad r=p+qx_1^N\in K[x_1,\cdots,x_n]\\ &= \langle f,g\rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pilih N cukup besar sehingga $x_1^N f$ mempunyai derajat lebih besar dalam x_1 daripada g. Karena koefisien awal dari $g+x_1^N f$ terhadap x_1 adalah a_0 dengan $a_l(c)\neq 0$ maka terdapat $c_1\in C$ dengan $(c_1,c)\in V\left(f,g+x_1^N f\right)$. Dengan (2.7), ini menyatakan $(c_1,c)\in V(f,g)$ dan teorema terbukti.

Bukti di atas tidak berlaku jika a_l dan b_m bernilai nol pada solusi parsial c, sebab jika a_l dan b_m bernilai nol pada solusi parsial mungkin tidak dapat diperluas. ■

Himpunan semua solusi dari polinomial f = 0 dan g = 0 dinotasikan dengan $V(I)$ dengan $I=\langle f,g\rangle$.

Selanjutnya akan dibuktikan teorema perluasan untuk sebarang ideal $\langle f_1,\cdots,f_s\rangle\subset C[x_1,\cdots,x_n]$. Kemudian akan dibahas resultan untuk $f_1,\cdots,f_s$ jika $s\geq 3$.

Misalkan $u_2,\cdots,u_s$ adalah variabel baru dan bentuk $f_2,\cdots,f_s$ menjadi polinomial tunggal sebagai berikut.

$u_2f_2+\cdots+u_sf_s\in C[u_2,\cdots,u_s,x_1,\cdots,x_n]$,

Maka f_1 dapat dinyatakan sebagai polinomial dalam ring yang sama, yaitu $C[u_2,\cdots,u_s,x_1,\cdots,x_n]$. Dengan proposisi 2.6, resultan dari f_1 dan $u_2f_2+\cdots+u_sf_s$ terletak pada $C[u_2,\cdots,u_s,x_2,\cdots,x_n]$. Untuk mendapatkan polinomial dalam $x_2,\cdots,x_n$, resultan diperluas dalam suku-suku dari pangkat $u_2,\cdots,u_s$, sehingga ditulis

$$\mathrm{Res}(f_1,u_2f_2+\cdots+u_sf_s,x_1)=\sum_\alpha h_\alpha(x_2,\cdots,x_n)u^\alpha, \tag{2.8}$$

dimana u^α adalah monomial $u_2^{\alpha_2}\cdots u_s^{\alpha_s}$ dan $h_\alpha\in C[x_2,\cdots,x_n]$ untuk semua α. Polinomial h_α disebut sebagai generalisasi resultan dari $f_1,\cdots,f_s$.

Teorema 2.2 (Teorema Perluasan)

Misalkan $I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle\subset C[x_1,\cdots,x_n]$ dan I_1 adalah ideal eliminasi tingkat 1 dari I. Untuk setiap $1\leq i\leq s$, f_i ditulis dalam bentuk

$f_i=g_i(x_2,\cdots,x_n)x_1^{N_i}$ + suku dengan derajat $x_1<N_i$

dimana $N_i\geq 0$ dan $g_i\in C[x_2,\cdots,x_n]$ bukan nol. Misalkan didapat solusi parsial $(c_2,\cdots,c_n)\in V(I_1)$. Jika $(c_2,\cdots,c_n)\notin V(g_1,\cdots,g_s)$ maka terdapat $c_1\in C$ sedemikian sehingga $(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in V(I)$.

Bukti.

Misalkan $c=(c_2,\cdots,c_n)$. Akan dicari akar persekutuan c_1 dari $f_1(x_1,c),\cdots,f_s(x_1,c)$. Untuk kasus s = 2 telah dibahas pada teorema 9, yang juga berlaku untuk kasus s = 1, karena $V(f_1)=V(f_1,f_1)$. Sekarang tinggal membuktikan teorema jika $s\geq 3$.

Karena $c \notin V(g_1, \cdots, g_s)$, maka dapat diasumsikan bahwa $g_1(c) \neq 0$. Misalkan $h_\alpha \in C[x_2, \cdots, x_n]$ sebagai generalisasi resultan dari $f_1, \cdots, f_s$. Jadi,

$$\text{Res}(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s, x_1) = \sum_\alpha h_\alpha u^\alpha \quad . \tag{2.9}$$

Akan ditunjukkan bahwa h_α terletak pada ideal eliminasi tingkat 1 dari I_1. Karena resultan dihitung pada ring $C[u_2, \cdots, u_s, x_1, \cdots, x_n]$, maka sesuai dengan proposisi 6 bahwa

$$Af_1 + B(u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s) = \text{Res}(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s, x_1). \tag{2.10}$$

untuk suatu polinomial $A, B \in C[u_2, \cdots, u_s, x_1, \cdots, x_n]$. Tulis $A = \sum_\alpha A_\alpha u^\alpha$ dan $B = \sum_\beta B_\beta u^\beta$, dimana $A_\beta, B_\beta \in C[x_1, \cdots, x_n]$. Akan dibuktikan $h_\alpha \in \langle f_1, \cdots, f_s \rangle = I$ dengan membandingkan koefisien dari u^α dalam (2.10). Karena $h_\alpha \in C[x_2, \cdots, x_n]$ maka $h_\alpha \in I_1$.

Untuk membandingkan koefisien, dibutuhkan penggunaan notasi monomial. Untuk itu, jika $e_2 = (1,0,\cdots,0), \cdots, e_s = (0,\cdots,0,1)$ maka $u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s = \sum_{i \geq 2} u^{e_i} f_i$. Sehingga persamaan (2.10) dapat ditulis

$$\sum_\alpha h_\alpha u^\alpha = \left(\sum_\alpha A_\alpha u^\alpha \right) f_1 + \left(\sum_\beta B_\beta u^\beta \right) \left(\sum_{i \geq 2} u^{e_i} f_i \right)$$

$$= \sum_\alpha \left(A_\alpha f_1 + \sum_{\substack{i \geq 2, \beta \\ \beta + e_i = \alpha}} B_\beta f_i \right) u^\alpha .$$

Jika koefisien dari u^α disamakan, maka diperoleh

$$h_\alpha = A_\alpha f_1 + \sum_{\substack{i \geq 2, \beta \\ \beta + e_i = \alpha}} B_\beta f_i \; .$$

Yang membuktikan bahwa $h_\alpha \in I$. Telah dilihat sebelumnya, ini menunjukkan bahwa $h_\alpha \in I_1$ untuk semua α.

Karena $c \in V(I_1)$, maka $h_\alpha(c) = 0$ untuk semua α. Kemudian (9) menunjukkan bahwa resultan $h = \text{Res}(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s, x_1)$ akan bernilai nol ketika nilai c ditentukan. Jika $h(c, u_2, \cdots, u_s)$ merupakan polinomial yang diperoleh dalam $C[x_1, u_2, \cdots, u_s]$, dengan mensubtitusikan $c = (c_2, \cdots, c_n)$ untuk $(x_2, \cdots, x_n)$, maka didapat

$$h(c, u_2, \cdots, u_s) = 0 . \tag{2.11}$$

Dibuat asumsi untuk f_2 sebagai berikut:

$g_2(c) \neq 0$ dan f_2 mempunyai derajat dalam x_1 yang lebih besar daripada $f_3, \cdots, f_s$,

$$\tag{2.12}$$

Ini berarti,

$$h(c, u_2, \cdots, u_s) = \text{Res}(f_1(x_1, c), u_2 f_2(x_1, c) + \cdots + u_s f_s(x_1, c), x_1) \tag{2.13}$$

Untuk membuktikannya hampir sama dengan argumen pada persamaan (2.6). Yaitu, jika dihitung determinan yang mendefinisikan nilai $h = \text{Res}(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s, x_1)$ pada c, ini mengikuti bahwa $h(c, u_2, \cdots, u_s)$ merupakan suatu determinan tertentu. Selanjutnya, determinan ini adalah resultan (2.13) yang membuktikan koefisien awal dari f_1 dan $u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s$ tidak sama dengan nol pada c. Ini benar untuk f_1 karena $g_1(c) \neq 0$.

Pandang $u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s$, asumsi (2.12) menyatakan bahwa koefisien awalnya adalah $u_2 g_2$, dan (2.12) juga menyatakan bahwa koefisien awal tidak sama dengan nol karena $g_2(c) \neq 0$. Ini melengkapi bukti (2.13). Jika (2.11) dikombinasikan dengan (2.13), maka diperoleh

$$\text{Res}(f_1(x_1, c), u_2 f_2(x_1, c) + \cdots + u_s f_s(x_1, c), x_1) = 0.$$

Polinomial $f_1(x_1, c)$ dan $u_2 f_2(x_1, c) + \cdots + u_s f_s(x_1, c)$ terletak pada $C[x_1, u_2, \cdots, u_s]$, sehingga dengan proposisi 2.6 $\text{Res}(f, g, x_1) = 0$ menyatakan bahwa keduanya mempunyai faktor persekutuan F dengan derajat positif dalam x_1. Karena F

membagi $f_1(x_1, c)$, maka F adalah polinomial dalam $C[x_1]$. Karena F membagi $u_2 f_2(x_1, c)$ maka

$$F(x_1)A(x_1, u_2, \cdots, u_s) = u_2 f_2(x_1, c) + \cdots + u_s f_s(x_1, c) \qquad (2.14)$$

untuk suatu $A \in C[x_1, u_2, \cdots, u_s]$. Perbandingan koefisien $u_2, \cdots, u_s$ berarti F membagi $f_2(x_1, c), \cdots, f_s(x_1, c)$ .Karena F juga membagi $f_1(x_1, c)$ maka F adalah faktor persekutuan dengan derajat positif untuk semua $f_i(x_1, c)$. Misalkan c_1 adalah akar dari F (diketahui c_1 ada karena semestanya bilangan kompleks). Maka c_1 otomatis merupakan akar persekutuan dari semua $f_i(x_1, c)$, yang membuktikan kebenaran Teorema Perluasan jika (2.12) benar.

Terakhir, jika (2.12) tidak benar untuk $f_1, \cdots, f_s$, maka dapat ditemukan basis baru yang membuat (2.12) terpenuhi/ bernilai benar. Ide dasarnya adalah menempatkan kembali f_2 dengan $f_2 + x_1^N f_1$, dimana N adalah bulat positif. Ternyata $I = \langle f_1, f_2 + x_1^N f_1, f_3, \cdots, f_s \rangle$. Jika N cukup besar, koefisien awal dari $f_2 + x_1^N f_1$ adalah g_1, yang diketahui tidak nol pada c. Buat N lebih besar bila perlu, sehingga dapat diasumsikan bahwa $f_2 + x_1^N f_1$ mem-punyai derajat lebih besar dalam x_1 daripada $f_3, \cdots, f_s$. Kemudian argumen sebelumnya memberikan c_1 yang merupakan akar persekutuan dari $f_1(x_1, c), f_2(x_1, c) + x_1^N f_1(x_1, c), f_3(x_1, c), \cdots, f_s(x_1, c)$. Ternyata c_1 merupakan akar persekutuan untuk semua $f_i(x_1, c)$. Ini melengkapi bukti teorema perluasan. ■

3. PENUTUP

1. Polinomial f dan g mempunyai faktor persekutuan dalam $K[x]$ jika dan hanya jika $\text{Res}(f, g, x) = 0$. Selanjutnya f dan g mempunyai faktor persekutuan dalam $K[x_1, \cdots, x_n]$ dengan derajat positif dalam x_1 jika dan hanya jika $\text{Res}(f, g, x_1) = 0$. Jika $\text{Res}(f, g, x_1) \neq 0$ maka f dan g tidak mempunyai faktor persekutuan dalam $K[x_1, \cdots, x_n]$.
2. Untuk $f_1, \cdots, f_s$ dengan $s \geq 3$ dalam $C[x_1, \cdots, x_n]$, maka pencarian resultan dengan menggunakan variabel baru $u_2, \cdots, u_s$ dan bentuk $f_2, \cdots, f_s$ menjadi polinomial tunggal $f = u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s$. Selanjutnya, dapat digunakan resultan untuk menentukan ada tidaknya akar persekutuan dari polinomial-polinomial tersebut.
3. Jika resultan = 0 pada solusi parsial, maka solusi sistem persamaan polinomial dapat diperoleh dengan memperluas solusi parsial menjadi solusi lengkap. Tetapi resultan tidak dapat menjamin keberadaan solusi sistem persamaan polinomial jika resultan tidak bernilai nol pada solusi parsial.
4. Untuk selanjutnya bisa dilakukan penelitian untuk mencari faktor persekutuan dari dua polinomial atau lebih dengan n-*indeterminate* setelah diketahui bahwa polinomial polinomial dengan n-*indeterminate* tersebut mempunyai faktor persekutuan.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. (1997), '*Aljabar Linear Elementer*', Fifth edition, Alih bahasa Pantur Silaban, Ph.D dan Drs. I. Nyoman Fusila, M.Sc, Erlangga, Jakarta.

[2] Cox, D., Little, J., Shea, D.O. (1996), '*Ideal, Varieties, and Algorithms : An Introduction to Computational Algebra Geometry and Commutative Algebra*', Second edition, Springer-Verlag, New York.

[3] Fraleigh, J.B. (1994), '*A First Course in Abstract Algebra*', Fifth edition, Addison – Wesley Publishing Company, Inc., US of America.

[4] Gilbert, J., Gilbert, L. (1998), '*Element of Modern Algebra*', Second edition, PWS – Kent Publ. Co, Boston.