BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Investasi dalam arti luas berarti mengorbankan uang atau dana sekarang untuk uang atau dana pada masa depan. Ada dua atribut berbeda yang melekat, yaitu waktu dan risiko. Pengorbanan yang dilakukan pada saat sekarang ini mengandung ketidakpastian, hasilnya baru akan diperoleh kemudian dan besarnya tidak pasti. Pada beberapa kasus, elemen waktu merupakan faktor yang mendominasi (misalnya obligasi pemerintah). Pada kasus yang lain risiko menjadi faktor yang dominan (misalnya *option call* pada saham biasa). Namun bisa juga waktu dan risiko menjadi faktor yang sangat penting (misalnya jumlah lembar saham).

Investasi terdiri dari investasi nyata (*real investment*) dan investasi keuangan (*financial investment*). Investasi nyata secara umum melibatkan aset berwujud seperti tanah, mesin-mesin, atau pabrik. Investasi keuangan melibatkan kontrak-kontrak tertulis seperti saham biasa dan obligasi. Pada perekonomian primitif, hampir semua investasi merupakan investasi nyata, sedangkan pada perekonomian modern, lebih banyak dilakukan investasi keuangan.

Dalam proses investasi, seorang invesor terlebih dahulu harus mengetahui beberapa konsep dari dasar investasi yang akan menjadi dasar pemikiran dalam setiap tahap pembuatan keputusan investasi yang akan dibuat. Hal mendasar dalam proses keputusan investasi adalah pemahaman hubungan antara tingkat keuntungan investasi (*return*) yang diharapkan dan risiko suatu investasi.

Hubungan risiko dan return yang diharapkan merupakan hubungan yang linier. Dimana semakin besar tingkat return yang diharapkan maka semakin besar risiko yang akan ditanggung (*high risk high return*).

Ada sebuah pepatah yang sangat terkenal dalam bidang investasi dari Harry M Markowitz yaitu “Janganlah menaruh semua telur ke dalam satu keranjang”, karena jika keranjang itu jatuh, maka semua telur yang ada dalam keranjang tersebut akan pecah. Dalam hal investasi, pepatah tersebut dapat diartikan sebagai “janganlah menginvestasikan semua dana yang dimiliki hanya pada satu aset saja, karena jika aset tersebut gagal maka semua dana yang telah diinvestasikan akan lenyap semua”. Oleh karena itu para investor harus mengurangi risiko yang ditanggung dengan melakukan diversifikasi investasi. Diversifikasi inilah yang sering disebut dengan portofolio

Baru-baru ini, kegiatan investasi saham di pasar modal mulai menarik perhatian masyarakat dan mulai diminati oleh usahawan konvensional. Terlebih lagi pada era globalisasi sekarang ini, kegiatan investasi ditunjang dengan perkembangan dan kemajuan teknologi informasi yang semakin pesat. Banyak faktor yang bisa dijadikan parameter yang menjadi alasan seorang investor memutuskan untuk menginvestasikan sejumlah dananya pada suatu jenis investasi. Jika seorang investor hanya tertarik pada satu jenis investasi untuk melihat prospek keuntungan yang akan diperolehnya, faktor-faktor tersebut belum menjadi suatu masalah yang menyulitkan. Namun akan menjadi suatu masalah yang besar jika investor dihadapkan pada begitu banyak kemungkinan lahan investasi yang dapat dimanfaatkan. Dari begitu banyak investasi yang ada di pasar bursa, sebut saja BEI, seluruh informasi yang berhubungan dengan layak atau tidaknya suatu aset untuk dijadikan lahan investasi diserap oleh seorang investor. Beberapa investasi dipilih dan digabungkan menjadi satu atau diperoleh tingkat keuntungan yang diharapkan. Tindakan investor seperti inilah yang melatarbelakangi para praktisi untuk menciptakan sebuah model/teori, dan memberikan informasi mengenai hal-hal di atas. Teori/model portofolio yang dapat menjawab hal tersebut dan didasarkan pada penelitian-penelitian adalah model keseimbangan. Model keseimbangan dapat digunakan untuk memahami bagaimana perilaku investor secara keseluruhan, serta bagaimana mekanisme pembentukan harga dan return pasar dalam bentuk yang lebih sederhana. Model keseimbangan juga dapat membantu untuk memahami bagaimana menentukan risiko yang relevan terhadap suatu aset, serta hubungan risiko dan return yang diharapkan untuk suatu aset ketika pasar dalam kondisi seimbang.

Model keseimbangan yang umum digunakan adalah *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) dan *Arbitrage Pricing Theory* (APT). Model CAPM merupakan model keseimbangan yang menggambarkan hubungan suatu risiko dan return secara lebih sederhana, dan hanya menggunakan satu variabel (disebut juga sebagai variabel beta) untuk menggambarkan risiko. Sedangkan model APT, merupakan sebuah model keseimbangan alternatif yang lebih kompleks dibandingkan CAPM karena menggunakan banyak variabel pengukur risiko untuk melihat hubungan risiko dan return.

1.2. Pemasalahan

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas maka permasalahan yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah cara membentuk portofolio yang optimal dengan menggunakan perpaduan *Arbitrage Pricing Theory* dan *Capital Asset Pricing Model*.

1.3. Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam tugas akhir ini dibatasi pada Model Teori Harga Arbitrase (*Arbitrage Pricing Theory*) dan Penetapan Harga Aktiva Modal (*Capital Asset Pricing Model*). Data yang digunakan merupakan data harga penutupan saham bulanan saham LQ-45 yang stabil pada periode Juni 2006-Mei 2008 dan juga data lainnya berupa inflasi, kurs Dollar, kurs Euro, Indeks Harga Konsumen (IHK), Indeks Harga Perdagangan Besar (IHPB), Indeks LQ-45 dan tingkat suku bunga Bank Indonesia yang diterbitkan perbulan sebagai variabel independen.

1.4. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk mempelajari dan memahami teori portofolio dan analisis investasi pada sekuritas berdasar prinsip statistika dalam menentukan kebijakan investasi.
2. Memadukan model portofolio *Arbitrage Pricing Theory* (APT) dan *Capital Asset Pricing Model* (CAPM).
3. Menentukan portofolio optimal berdasarkan perpaduan APT dan CAPM.
4. Menerapkan model tersebut dalam data-data finansial di Indonesia.

1.5. Sistematika Penulisan

Untuk memberikan gambaran menyeluruh mengenai pembentukan portofolio optimal dengan perpaduan model portofolio *Arbitrage Pricing Theory* (APT) dan *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), tugas akhir ini terdiri dari : Bab I merupakan Pendahuluan yang berisi latar belakang, perumusan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Bab II merupakan Teori Penunjang yang berisi teori dasar yang menunjang pembahasan mengenai pembentukan portofolio optimal meliputi : variabel random, nilai ekspektasi, varians dan kovarians, korelasi, sistem persamaan linier dan matriks, analisis multivariat, derivatif, turunan parsial, lagrange multiplier, distribusi normal multivariat, uji normalitas multivariat, analisis regresi, investasi, pasar modal, saham, saham LQ45, sertifikat bank indonesia, return. Bab III berisi pembahasan mengenai perpaduan Arbitrage Pricing Theory (APT) dan Capital Asset Pricing Model (CAPM) dalam penentuan portofolio optimal meliputi : karakteristik umum portofolio, *Arbitrage Pricing Theory* (APT), *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), perbandingan APT dan CAPM, perpaduan APT dan CAPM, pembentukan portofolio, analisis faktor, pembentukan portofolio berdasarkan perpaduan APT dan CAPM. Bab IV merupakan kesimpulan dan saran.

BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Variabel Random

Definisi 2.1.1 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Variabel random X disebut variabel random diskrit jika himpunan semua nilai yang mungkin muncul dari X merupakan himpunan terhitung (*countable*).

$$f(x) = P[X = x] \qquad x = x_1, x_2, \ldots$$

disebut fungsi kepadatan probabilitas diskrit (*discrete pdf*). (2.1.1)

Sedangkan fungsi distribusi kumulatif dari variabel random X didefinisikan sebagai :

$$F(x) = P[X \leq x] \tag{2.1.2}$$

Definisi 2.1.2 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Variabel random X disebut variabel random kontinu jika terdapat fungsi $f(x)$ yang merupakan fungsi kepadatan probabilitas dari X, dan fungsi distribusi kumulatifnya dapat ditunjukkan sebagai :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.1.3}$$

2.2 Nilai Ekspektasi

Definisi 2.2.1 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Jika X adalah variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai :

$$E(X) = \sum_{x} xf(x) \qquad \text{, jika } X \text{ diskrit} \tag{2.2.1}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad \text{, jika } X \text{ kontinu} \qquad (2.2.2)$$

$E(X)$ seringkali ditulis dengan notasi μ atau μ_X .

Sifat-sifat nilai ekspektasi :

1. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ (2.2.3)
2. $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$ (2.2.4)
3. $E(aX+b) = a.E(X) + b$ (2.2.5)
4. $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)].E[h(Y)]$ (2.2.6)

2.3 Varians dan Kovarians (Johnson dan Wichern, 2007)

Didefinisikan $\mathbf{X} = \lfloor X_1, X_2, ..., X_p \rfloor$ adalah vektor random $(\mathrm{p} \times 1)$. Rata-rata marginal (μ_i) dan varians marginal (σ_i^2) berturut-turut didefinisikan sebagai $\mu_i = E(X_i)$ dan $\sigma_i^2 = E(X_i - \mu_i)^2$, dengan *i* = 1, 2, ..., *p*

$$\mu_i = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i) dx_i & \text{, jika } X_i \text{ variabel random kontinu dengan fungsi densitas } f_i(x_i) \\ \sum_{\forall x_i} x_i P_i(x_i) & \text{, jika } X_i \text{ variabel random diskrit dengan fungsi densitas } P_i(x_i) \end{cases}$$

$$\sigma_i^{\,2} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)^2 f(x_i) dx_i & \text{, jika } X_i \text{ variabel random kontinu dengan fungsi densitas } f_i(x_i) \\ \sum_{\forall x_i} (x_i - \mu_i)^2 P(x_i) & \text{, jika } X_i \text{ variabel random diskrit dengan fungsi densitas } P_i(x_i) \end{cases}$$

Untuk semua pasangan variabel random X_i dan X_k , hubungan linear antara keduanya diberikan oleh kovarians $\sigma_{ik} = E(X_i - \mu_i)(X_k - \mu_k)$

$$\sigma_{ik} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k)f_{ik}(x_i, x_2)dx_i dx_k & \text{, jika } X_i \text{ dan } X_k \text{ variabel random kontinu dengan fungsi probabilitas bersama } f_{ik}(x_i, x_k) \\ \sum_{\forall x_i}\sum_{\forall x_k}(x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k)P_{ik}(x_i, x_k) & \text{, jika } X_i \text{ dan } X_k \text{ variabel random diskrit dengan fungsi probabilitas bersama } P_{ik}(x_i, x_k) \end{cases}$$

Khusus untuk $i = k$, $\sigma_{ik} = \sigma_i^2$ merupakan varians marginal. Jika variabel random X_i dan X_k saling bebas maka Cov (X_i ,X_k) = σ_{ik} = 0. Jika $X_1, \ldots, X_n$ adalah variabel random dan $a_1, \ldots, a_n$ adalah konstanta, maka :

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum a_i a_j Cov(X_i, X_j) \quad \text{atau} \tag{2.3.1}$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j) \tag{2.3.2}$$

2.4 Korelasi

Definisi 2.4.1 (Johnson dan Wichern, 2007)

Korelasi diantara dua variabel X dan Y didefinisikan sebagai berikut :

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \tag{2.4.1}$$

Secara matriks dengan ukuran p, yakni $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$, maka secara teoritis matriks korelasinya didefinisikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{X_1X_1} & \cdots & \rho_{X_1X_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_pX_1} & \cdots & \rho_{X_pX_p} \end{bmatrix}$$

2.5 Sistem Persamaan Linier dan Matriks

2.5.1 Sistem Persamaan Linear (Anton, 1995)

Sebuah garis dalam bidang xy secara aljabar dapat dinyatakan oleh persamaan yang berbentuk

$$a_1x + a_2y = b \qquad (2.5.1.1)$$

Persamaan semacam ini dinamakan persamaan linear dalam peubah (variabel) x dan peubah y. Secara lebih umum, didefinisikan persamaan linear dalam n peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (2.5.1.2)$$

Dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil.

2.5.2 Eliminasi Gauss-Jordan (Anton, 1995)

Prosedur yang sistematik untuk memecahkan persamaan linear adalah didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi. Prosedur tersebut disebut dengan eliminasi Gauss-Jordan.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas adalah contoh matriks yang dinyatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi. Supaya terbentuk seperti di atas, maka matriks tersebut harus mempunyai sifat-sifat :

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1 (dinamakan 1 utama).
2. Jika baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bawah matriks.
3. Dalam sembarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

2.5.3 **Sistem Persamaan Linear Homogen** (Anton, 1995)

Suatu sistem persamaan linear dikatakan homogen jika semua suku konstan sama dengan nol. Sistem persamaan tersebut mempunyai bentuk :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (2.5.3.1)$$

Tiap-tiap sistem persamaan linear homogen adalah sistem yang konsisten, karena $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$ selalu merupakan pemecahan. Pemecahan tersebut dinamakan pemecahan trivial (*trivial solution*). Jika ada pemecahan lain, maka pemecahan tersebut dinamakan pemecahan taktrivial (*nontrivial solution*).

2.5.4 Matriks

Definisi 2.5.4 (Anton, 1995)

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

A merupakan sebuah matriks dengan ordo (ukuran) $n \times p$ maka a_{ij} menyatakan entri yang terdapat di dalam baris *i* dan kolom *j*.

2.5.5 Matriks dan Vektor Khusus (Gujarati, 1999)

1. Skalar

   Suatu skalar adalah satu angka (real) tunggal, secara alternatif, skalar adalah matriks 1×1.

2. Vektor Kolom

   Vektor kolom adalah Suatu matriks yang terdiri dari M baris dan hanya satu kolom.

3. Vektor Baris

   Vektor baris adalah suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris dan N kolom.

4. Vektor Satuan

   Vektor satuan adalah suatu vektor baris atau vektor kolom yang unsur-unsurnya semuanya 1.

5. Vektor Nol

   Vektor nol adalah suatu vektor baris atau kolom yang unsur-unsurnya semuanya nol.

6. Matriks Bujursangkar

   Suatu matriks yang mempunyai banyak baris yang sama dengan banyak kolom disebut matriks bujursangkar.

7. Matriks Diagonal

   Suatu matriks bujursangkar dengan sekurang-kurangnya satu unsur tidak nol pada diagonal utama (yaitu diagonal dari sudut atas kiri ke sudut kanan bawah) dan nol untuk semua unsur lainnya disebut matriks diagonal.

8. Matriks Identitas

   Suatu matriks yang diagonal yang unsur diagonalnya semua satu disebut matriks identitas dan dinyatakan dengan **I**.

9. Matriks Simetris

   Suatu matriks bujursangkar yang unsur-unsurnya di atas diagonal utama merupakan bayang-bayang (pencerminaan) dari unsur-unsur bawah diagonal utamanya disebut matriks simetris.

10. Matriks Nol

    Semua matriks yang unsurnya semua nol disebut matriks nol dan dinyatakan dengan **0**.

2.5.6 Transpose Matriks (Anton, 1995)

Transpose dari matriks $\mathbf{A}_{n \times p}$ dengan unsur a_{ij}, dinotasikan $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ adalah matriks berukuran $p \times n$ yang memiliki unsur a_{ji}.

Sifat-sifat transpose matriks :

1. $\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}$ (2.5.6.1)

2. $\left(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}\right)^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \pm \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ (2.5.6.2)

3. $\left(\mathbf{ABC}\right)^{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ (2.5.6.3)

2.5.7 Determinan

Definisi 2.5.7 (Anton, 1995; Gujarati, 1999)

Misal **A** adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan det(**A**) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari **A**.

1. Determinan matriks 2×2

   Determinan dari $\mathbf{A}_{2\times 2}$ didefinisikan sebagai :

   $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2. Determinan matriks 3×3

   Determinan dari $\mathbf{A}_{3\times 3}$ didefinisikan sebagai :

   $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

3. Matriks minor

   Diberikan matriks $\mathbf{A}_{n\times n}$. Minor dari a_{ij}, ditulis $|\mathbf{A}_{ij}|$ didefinisikan sebagai determinan dari submatriks **A** yang didapatkan dengan cara menghilangkan baris ke-*i* dan kolom ke-*j*.

4. Matriks kofaktor

   Diberikan matriks $\mathbf{A}_{n\times n}$. Kofaktor dari a_{ij} dinyatakan dengan C_{ij}, didefinisikan sebagai $(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$.

5. Matriks Adjoint

Matriks adjoint dari **A**, ditulis $adj(\mathbf{A})$, didefinisikan sebagai transpose dari matriks kofaktor dari **A**.

6. Determinan matriks $n \times n$

Determinan dari $\mathbf{A}_{n \times n}$ dapat diperoleh dengan cara mengalikan unsur-unsur pada sembarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya lalu menjumlahkan hasil kali yang didapatkan, untuk $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, yaitu :

$|\mathbf{A}| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$ (perluasan kofaktor di sepanjang baris ke-i), dan

$|\mathbf{A}| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$ (perluasan kofaktor di sepanjang kolom ke-j)

2.5.8 Invers

Definisi 2.5.8 (Anton, 1995)

Diberikan matriks $\mathbf{A}_{p \times p}$. Jika terdapat suatu matriks $\mathbf{B}_{p \times p}$ sedemikian sehingga $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ maka **B** adalah invers dari **A**, dinotasikan $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} adj(\mathbf{A}) \text{ dengan } |\mathbf{A}| \neq 0 \tag{2.5.8.1}$$

Sifat-sifat invers :

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$ (2.5.8.2)
2. $\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathbf{T}}$ (2.5.8.3)
3. $\left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (2.5.8.4)

4. $(k\mathbf{A})^{-1} = \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{A}^{-1}$ (2.5.8.5)

2.5.9 Kebebasan Linear

Definisi 2.5.9 (Anton, 1995)

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0 \quad (2.5.9.1)$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni :

$k_1 = 0, k_2 = 0, ..., k_r = 0$

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan himpunan bebas linear (*linearly independent*). Jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan himpunan tak bebas linear (*linearly dependent*).

2.6 Analisa Multivariat

2.6.1 Matriks Data Multivariat

Secara umum, sampel data analisis multivariat dapat digunakan dalam bentuk berikut :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \text{variabel} - 1 & \text{variabel - 2} & \cdots & \text{variabel - j} & \cdots & \text{variabel - p} \\
\text{objek - 1} & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1j} & \cdots & X_{1p} \\
\text{objek - 2} & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2j} & \cdots & X_{2p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{objek - i} & X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{ij} & \cdots & X_{ip} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{objek} - \text{n} & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nj} & \cdots & X_{np}
\end{array}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk matriks dengan n baris dan p kolom sebagai berikut :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1j} & \cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2j} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{ij} & \cdots & X_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nj} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}$$

dengan X_{ij} : data objek ke-*i* pada variabel ke-*j*

n : banyaknya objek

p : banyaknya variabel

sebagai alternatif dapat juga ditulis $\mathbf{X} = (X_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, p$

2.6.2 Mean dan Varians Vektor Random

Definisi 2.6.2 (Johnson dan Wichern, 2007)

Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya merupakan variabel random. Mean dan kovarians vektor random **X** dengan ordo $p \times 1$ dapat ditulis sebagai matriks yaitu

$$E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}][\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}]^T = E\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 & \cdots & X_p - \mu_p \end{bmatrix}\right]$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = E\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & (X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & (X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ E(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & \cdots & E(X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & E(X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \operatorname{cov}(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Karena $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ maka

$$\mathbf{\Sigma} = \operatorname{cov}(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \text{ merupakan matriks simetris}$$

$\boldsymbol{\mu}$: mean populasi

$\mathbf{\Sigma}$: varians kovarians populasi

2.6.3 Mean Vektor dan Matriks Kovarians untuk Kombinasi Linear Variabel Random

Definisi 2.6.3 (Johnson dan Wichern, 2007)

$Y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p$ adalah kombinasi linear dari vektor $x_1, x_2, \cdots, x_p$. Dimisalkan $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [a_1 \quad a_2]$ maka kombinasi linear $a_1x_1 + a_2x_2$ dapat ditulis sebagai $[a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$.

Maka, $E(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) = a_1\mu_1 + a_2\mu_2$

$$= [a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} \qquad \text{, dimana } \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [a_1 \quad a_2]$$

Apabila $\mathbf{\Sigma} = \operatorname{cov}(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ maka

$\operatorname{var}(a_1x_1 + a_2x_2) = \operatorname{var}(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{c}$

Hasil ini dapat diperluas untuk kombinasi linear p variabel random yakni

Kombinasi linear $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = c_1x_1 + \ldots + c_px_p$ mempunyai

mean $= E(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$ (2.6.3.1)

varians $= \operatorname{var}(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{c}$ (2.6.3.2)

dimana $\mu = E(\mathbf{X})$ dan $\Sigma = \operatorname{cov}(\mathbf{X})$

2.7 Derivatif

Definisi 2.7

Bila $y = f(x)$ adalah suatu fungsi variabel *x* dan bila $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ atau berarti $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ada dan terbatas maka limit tersebut dinamakan turunan atau derivatif pertama dari *y* terhadap *x* dan *f(x)* dikatakan fungsi dari *x* yang dapat diturunkan atau terdiferensial (*differentiable*).

2.8 Turunan Parsial

Definisi 2.8

Bila $z = f(x, y)$ terdefinisi dalam domain D di bidang *xy*, sedang turunan pertama *f* terhadap *x* dan *y* di setiap titik (*x,y*) ada, maka

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = turunan parsial pertama *f* ke *x* (selain *x* dianggap konstan)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = turunan parsial pertama f ke y (selain y dianggap konstan)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Dalam penulisannya, terkadang dituangkan dalam notasi lain, yakni :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y$$

2.9 Lagrange Multiplier

Fungsi Lagrange sering digunakan dalam kasus menyelesaikan masalah optimasi (penentuan harga ekstrim) dimana terdapat batasan-batasan (*constraints*) tertentu.

2.9.1 Satu Pengali Lagrange

Jika ingin mencari harga ekstrim (optimisasi) fungsi $f(x, y)$ dengan *constraint* tertentu yang harus dipenuhi yakni $g(x, y) = 0$ dengan membentuk fungsi Lagrange

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \tag{2.9.1.1}$$

Dengan syarat ekstrim $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ dan $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ (yang tak lain adalah $g(x, y) = 0$)

Parameter λ inilah yang dinamakan pengali Lagrange.

2.9.2 Lebih dari Satu Pengali Lagrange

Jika Metode Pengali Lagrange melibatkan *constraints* lebih dari satu, parameter yang dipilih adalah λ, μ atau parameter yang lain. Misal untuk memperoleh nilai ekstrim $f(x,y,z)$ dengan *constraints* $g(x,y,z)=0$ dan $h(x,y,z)=0$ maka sebagai fungsi lagrange adalah

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z) \tag{2.9.2.1}$$

Cara penyelesainnya adalah $\frac{\partial F}{\partial x}=0, \frac{\partial F}{\partial y}=0, \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$ dan $\frac{\partial F}{\partial \mu}=0$

Metode ini dapat diperluas untuk n variabel $f(x_1,x_2,...,x_n)$ dengan k kendala $\phi_1(x_1,x_2,...,x_n), \phi_2(x_1,x_2,...,x_n),..., \phi_k(x_1,x_2,...,x_n)$

Sebagai Fungsi Lagrangenya adalah :

$F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)=f+\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2+...+\lambda_k\phi_k$

Dengan cara penyelesaiannya :

$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0, \frac{\partial F}{\partial x_2}=0,..., \frac{\partial F}{\partial x_n}=0, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=0,..., \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}=0$

Dimana $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ adalah Pengali Lagrange.

2.10 Distribusi Normal Multivariat

Definisi 2.6.3 (Morrison, 1976)

Densitas bersama dari beberapa variat normal yang independen adalah

$$f(x_1,\dots,x_p)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_p)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}(\sigma_1\cdots\sigma_p)}exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right] \tag{2.10.1}$$

Jika ditulis

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & \dots & x_p\end{bmatrix}^T,\ \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_1 & \dots & \mu_p\end{bmatrix}^T,\ \text{dan}\ \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_p^2\end{bmatrix}$$

Sehingga densitas bersamanya dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \right] \quad (2.10.2)$$

2.11 Uji Normalitas Multivariat

Pengujian normal multivariat dilakukan untuk melihat apakah sampel data berasal dari populasi yang berdistribusi normal atau tidak. Pada pengujian normal multivariat, variabel yang akan diuji adalah jarak mahalanobis dari data. Perumusan hipotesis pada pengujian normal multivariat adalah:

Hipotesis :

H_0 : data berdistribusi normal multivariat (jarak mahalanobis berdistribusi *Chi-Square*)

H_1 : data tidak berdistribusi normal multivariat (jarak mahalanobis tidak berdistribusi *Chi-Square*)

Tingkat Signifikansi :

$\alpha = 5\%$

Statistik Uji :

$$DN = \sup_x |F^*(x) - S(x)|$$

dengan $F^*(x)$ = distribusi frekuensi kumulatif data sampel

$S(x)$ = distribusi kumulatif yang dihipotesakan

Kriteria Uji :

Tolak H_0 jika $DN > DN^*(\alpha)$ dengan $DN^*(\alpha)$ adalah kuantil tes statistik Kolmogorov-Smirnov 1-α yang dapat diketahui dari tabel Kolmogorov-Smirnov pada *Lampiran XIV*. Atau tolak H_0 jika *p-value* < α .

Pengujian normal multivariat juga dapat dilakukan dengan metode grafik melalui prosedur sebagai berikut:

1. Menentukan jarak mahalanobis $d_j = \left(x_j - \bar{x}\right)^T \Sigma^{-1}\left(x_j - \bar{x}\right)$, j = 1, 2,…, n dengan Σ matrix varians-kovarians sampel dan $\bar{x}$ vektor rata-rata sampel
2. Mengurutkan d_j sesuai dengan urutan naik
3. Menentukan χ_j kuantil Chi-Kuadrat 100_p% dengan p=(j-0,5)/n , df = k

Plot pasangan $\left(\chi_j, d_j\right)$ $j = 1,2,\ldots,n$. Jika plot berpola linier (mengikuti garis lurus) maka sampel berdistribusi normal multivariat.

2.12 Analisis Regresi

Analisis regresi merupakan suatu analisis antara dua variabel yaitu variabel independen (prediktor) yaitu variabel X dan variabel dependen (respon) yaitu variabel Y, dan X diasumsikan mempengaruhi Y. Hubungan tersebut bisa didapat dengan visualisasi data hasil observasi sebagai hasil eksperimen, yaitu :

$y_t = x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + \ldots + x_{tk}\beta_k + e_t$, untuk t = *1, 2, 3, …, T*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \qquad (2.12.1)$$

$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}$, merupakan vektor variabel random hasil observasi

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots & x_{Tk} \end{bmatrix},$$ merupakan matriks nonstokastik yang diketahui nilainya dengan independen vektor kolom, yang berarti tidak ada kolom X_i yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari kolom-kolom yang lain. Misal $x_1 \neq c_2 x_2 + c_3 x_3 + ... + c_k x_k$ dimana c_i , i = 1, 2, 3, …, k konstan. X mempunyai rank k dan matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ adalah nonsingular.

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix},$$ merupakan vektor $(k \times 1)$ dari parameter yang tidak diketahui, yang akan diestimasi dari informasi sampel.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_T \end{bmatrix},$$ adalah vektor $(T \times 1)$, kesalahan dari nilai random yang tidak terobservasi, yang mempunyai mean vektor $E(\mathbf{e}) = 0$ dan matriks kovarians :

$$E[\mathbf{e}^{'}\mathbf{e}] = E\left[\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_T \end{bmatrix} \right] = \mathbf{E}\begin{bmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & \cdots & e_1e_T \\ e_2e_1 & e_2e_2 & \cdots & e_2e_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_Te_1 & e_Te_2 & \cdots & e_Te_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}{}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22}{}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{TT}{}^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}_T$$

Yang menandakan bahwa vektor random sebenarnya, e, mempunyai elemen yang tidak berkorelasi satu sama lain dan mempunyai mean dan varians yang identik. Nilai skalar σ^2 biasanya tidak diketahui dan $\mathbf{I}_T$ adalah matriks identitas dengan order T.

2.12.1 Kriteria Kuadrat Terkecil

Dalam melakukan estimasi terhadap β menggunakan data, diharapkan kesalahan dari persamaan linear, $(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})$, minimal. Dengan kata lain, diharapkan untuk membuat bagian sistem dari y menjadi sesempurna mungkin.

Kesalahan $(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})$ yang besar secara tidak langsung menyatakan keterbatasan informasi mengenai y. maka penting untuk menggunakan aturan bertujuan menghindari kesalahan yang besar. Salah satu caranya yaitu dengan memilih kriteria kuadrat terkecil. Untuk model (2.12.1), kriteria tersebut bisa dinyatakan dengan memilih aturan untuk mengestimasi β yang membuat bentuk kuadrat kesalahan, $S=(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})^T(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})$, bernilai minimal.

Dengan menggunakan aljabar vektor dan matriks, maka jumlah kuadrat kesalahan pada (2.12.1.2) dapat ditulis :

$$(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})^T(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})=(\mathbf{Y}^T-\mathbf{\beta}^T\mathbf{X}^T)(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})$$

$$(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})^T(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})=(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}-\mathbf{Y}^T\mathbf{X\beta}-\mathbf{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{Y}+\mathbf{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X\beta})$$

$$(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})^T(\mathbf{Y}-\mathbf{X\beta})=\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}-\mathbf{2X}^T\mathbf{\beta}^T\mathbf{Y}+\mathbf{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X\beta}$$

Dimana $\mathbf{Y}^T\mathbf{X\beta}$ dan $\mathbf{X}^T\mathbf{\beta}^T\mathbf{Y}$ dinotasikan skalar, sehingga keduanya sama

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_T \end{bmatrix}=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_T^2=\text{skalar}$$

$$\mathbf{2\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{Y}=2\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{T1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{T2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & \cdots & x_{Tk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{2\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = 2\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X_1}^T\mathbf{Y} \\ \mathbf{X_2}^T\mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{X_k}^T\mathbf{Y}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X_1}^T = \begin{bmatrix}x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{T1}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X_2}^T = \begin{bmatrix}x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{T2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X_k}^T = \begin{bmatrix}x_{1k} & x_{2k} & \cdots & x_{Tk}\end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \mathbf{2}\left[\boldsymbol{\beta}_\mathbf{1}\mathbf{X_1}^\mathbf{T}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}_\mathbf{2}\mathbf{X_2}^\mathbf{T}\mathbf{Y} + \mathbf{...} + \boldsymbol{\beta}_\mathbf{k}\mathbf{X_k}^\mathbf{T}\mathbf{Y}\right] = \text{skalar}$$

$$\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{T1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{T2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & \cdots & x_{Tk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots & x_{Tk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_k^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k\end{bmatrix}$$

Dengan $\mathbf{X_1} = \begin{bmatrix}x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{T1}\end{bmatrix}$, $\mathbf{X_2} = \begin{bmatrix}x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{T2}\end{bmatrix}$, $\mathbf{X_k} = \begin{bmatrix}x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{Tk}\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1^TX_1 & X_1^TX_2 & \cdots & X_1^TX_k \\ X_2^TX_1 & X_2^TX_2 & \cdots & X_2^TX_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_k^TX_1 & X_k^TX_1 & \cdots & X_k^TX_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k\end{bmatrix} = \text{skalar}$$

Matriks kuadrat $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ adalah simetris. Diasumsikan bahwa matriks $\mathbf{X}$ sedemikian hingga matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ bersifat definit positif dan nonsingular. Hal ini berarti suatu vektor tidak nol **Z**, skalar $\mathbf{Z}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{Z} > 0$. Misalkan matriks simetris berorde $(K \times K)$ yaitu $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{A} = [a_{ij}]$, maka bentuk kuadratnya adalah :

$$\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_k\end{bmatrix} \qquad (2.12.1.1)$$

$$\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \sum_i\sum_i a_{ij}\beta_i\beta_j = a_{11}\beta_1{}^2 + a_{22}\beta_2{}^2 + \ldots + a_{kk}\beta_k{}^2 + 2a_{12}\beta_1\beta_2 + \ldots + 2a_{(k-1)k}\beta_{(k-1)}\beta_k$$

2.12.2 Estimasi Parameter

Permasalahan yang timbul adalah jika diberikan matriks **X** dan observasi sampel *y*, bagaimana memperoleh koefisien vektor ***b*** yang meminimalkan bentuk kuadrat :

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{2}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \qquad (2.12.2.1)$$

Dari aturan diferensiasi matriks dan vektor, jika diketahui **A** adalah matriks simetris $(K \times K)$ dan jika **Z** dan **W** adalah vektor $(K \times 1)$, maka :

$$\frac{\partial(\mathbf{Z}^T\mathbf{W})}{\partial\mathbf{Z}} = \frac{\partial(\mathbf{Z_1W_1} + \mathbf{Z_2W_2} + \ldots + \mathbf{Z_kW_k})}{\partial\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial(\mathbf{Z}^T\mathbf{W})}{\partial\mathbf{Z_1}}\\ \dfrac{\partial(\mathbf{Z}^T\mathbf{W})}{\partial\mathbf{Z_2}}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial(\mathbf{Z}^T\mathbf{W})}{\partial\mathbf{Z_k}}\end{bmatrix} = \mathbf{W} \qquad (2.12.2.2)$$

Dan $\dfrac{\partial(\mathbf{Z}^T\mathbf{AZ})}{\partial\mathbf{Z}} = \mathbf{2AZ}$

Pada bentuk kuadrat (2.12.2.1), **Y** dan **X** diketahui, tetapi **β** tidak diketahui. Nilai maksimum dan minimum pada fungsi multivariat diperoleh jika derivatif parsial orde satu bernilai nol, derivatif parsial dari (2.12.2.1) adalah :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial\left(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} - \frac{\partial\left(\mathbf{2}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{Y}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial\left(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{2X}^T\mathbf{Y} + \mathbf{2X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \qquad (2.12.2.3)$$

Minimum dari (2.12.2.1) diperoleh jika (2.12.2.3) bernilai nol dan itu merupakan parameter optimum dari vektor **b**, dimana **b** adalah estimasi dari $\boldsymbol{\beta}$. Sisi kanan dari persamaan (2.12.2.3) dapat ditulis sebagai :

$$-\mathbf{2X}^T\mathbf{Y} + \mathbf{2X}^T\mathbf{Xb} = \mathbf{0} \qquad \text{atau} \qquad \mathbf{2X^T Xb} = \mathbf{2X^T Y} \qquad (2.12.2.4)$$

Sistem persamaan di atas bisa ditulis menjadi :

$$\mathbf{X}^T\mathbf{Xb} = \mathbf{X}^T\mathbf{Y} \qquad (2.12.2.5)$$

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{X^T X}\right)^{-1}\mathbf{X^T Y} \qquad (2.12.2.6)$$

Vektor **b** merupakan solusi tunggal untuk koefisien $\boldsymbol{\beta}$ yang tidak diketahui. Jadi, dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dan diberikan data sampel **Y** dan **X**, diperoleh $\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$ sebagai estimasi dari vektor $\boldsymbol{\beta}$.

Untuk menunjukkan bahwa S benar-benar minimum, maka persamaan (2.12.2.1) akan diturunkan sekali lagi terhadap $\boldsymbol{\beta}$, dan harus menghasilkan turunan kedua yang lebih besar dari nol.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\frac{\partial\left(2\mathbf{X}^T\mathbf{Y}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial\left(\mathbf{2X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{2X}^T\mathbf{X} \qquad (2.12.2.7)$$

karena merupakan bentuk kuadrat, maka $\mathbf{2X}^T\mathbf{X} > 0$ yang berarti $\mathbf{b} = \left(\mathbf{X^T X}\right)^{-1}\mathbf{X^T Y}$ minimum.

2.12.3 Uji Hipotesis Koefisien Regresi

Dalam regresi berganda, uji hipotesis mengenai parameter-parameter model regresi berguna dalam mengukur kecocokan model. Uji hipotesis tersebut dapat dilakukan sebagai berikut :

UJI SIGNIFIKANSI MODEL REGRESI

Uji signifikansi model regresi merupakan sebuah uji untuk menentukan apabila terdapat hubungan linear antara variabel tak bebas Y dan beberapa variabel bebas X_1, X_2, …, X_p. uji signifikansi model regresi dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Hipotesis :

H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_p = 0$

H_1 : $\beta_j \neq 0$ untuk paling sedikit satu j , j=*1, 2, 3, … , p*

Tingkat Signifikansi :

$\alpha = 5\%$

Statistik Uji :

$$F_h = \frac{\text{JKR/p}}{\text{JKG/(n} - \text{p} - 1)}$$

$$= \frac{\left(\hat{\beta}_1 \sum y_i x_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + ... + \hat{\beta}_p \sum y_i x_{pi}\right) / p}{\sum e_i^2 / (n - p - 1)}$$

Kriteria Uji :

Tolak H_0 jika $F_h > F_{\alpha,p,n-p-1}$, dengan nilai F yang dapat diketahui dari Tabel F pada *Lampiran XV*.

UJI HIPOTESIS KOEFISIEN REGRESI PARSIAL

Uji hipotesis koefisien regresi parsial merupakan uji secara individu terhadap masing-masing koefisien regresi yang berguna untuk menentukan apakah variabel bebas X_j memberikan kontribusi yang signifikan terhadap model regresi. Langkah-langkah dalam uji hipotesis koefisien regresi parsial diberikan sebagai berikut :

Hipotesis :

H_0 : $\beta_j = 0$ (variabel bebas X_j tidak memberikan kontribusi yang signifikan terhadap model regresi)

H_1 : $\beta_j \neq 0$ (variabel bebas X_j memberikan kontribusi yang signifikan terhadap model regresi)

Tingkat Signifikansi :

$\alpha = 5\%$

Statistik Uji :

$$t_h = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_j\right)}}$$

Kriteria Uji :

Tolak H_0 jika $|t_h| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-p-1}$, dengan nilai t yang dapat diketahui dari Tabel t pada *Lampiran XVI.*

2.13 Investasi

Investasi adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan saat ini, dengan tujuan memperoleh keuntungan di masa datang (*Tandelilin, 2001*). Seorang investor membeli sejumlah saham saat ini dengan harapan memperoleh keuntungan dari kenaikan harga saham ataupun sejumlah dividen di masa yang akan datang, sebagai imbalan atas waktu dan risiko yang terkait dengan investasi tersebut.

Istilah investasi bisa berkaitan dengan berbagai macam aktivitas. Menginvestasikan sejumlah dana pada aset riil (tanah, emas, mesin atau bangunan), maupun aset finansial (deposito, saham ataupun obligasi) merupakan aktivitas yang umum dilakukan. Pihak-pihak yang melakukan investasi disebut investor. Investor pada umumnya bisa digolongkan menjadi dua, yaitu investor individual (individual / *retail investors*) dan investor institusional (*institutional investors*).

Sebelum terlibat dalam investasi sebaiknya mengetahui terlebih dahulu prosedur dalam membuat keputusan yang digunakan sebagai dasar proses investasi, diantaranya:

1. *Penentuan Kebijakan Investasi*

   Kebijakan investasi meliputi, penentuan tujuan investor dan kemampuannya/kekayaannya yang dapat diinvestasikan. Investor menyatakan tujuannya untuk memperoleh keuntungan yang banyak dengan mengetahui kemungkinan kerugian yang akan dihadapinya. Sehingga tujuan investor dinyatakan dalam risiko maupun *return*. Selain itu prosedur ini juga meliputi identifikasi kategori parsial dari aset finansial untuk portofolio. Indentifikasi ini meliputi tujuan investasi, jumlah kekayaan yang akan diinvestasikan, dan status pajak dari investor.

2. *Melakukan Analisis Sekuritas*

   Analisis ini meliputi penilaian terhadap sekuritas secara individual (dapat juga beberapa kelompok sekuritas) yang termasuk kedalam aset finansial yang telah diidentifikasi sebelumnya. Tujuan dari penilaian ini untuk mengidentifikasi sekuritas yang salah harga (*mispriced*). Analisis sekuritas ada dua tipe yaitu analisis teknis yang biasanya digunakan untuk meramalkan gerakan harga pada masa depan untuk saham perusahaan tertentu dan yang kedua yaitu analisis fundamental yang dimulai dengan pernyataan bahwa nilai intrinsik dari aset finansial sama dengan *present value* dari semua aliran tunai yang diharapkan diterima oleh pemilik aset.

3. *Membentuk Portofolio*

Mengkonstruksikan portofolio dengan tujuan untuk mengidentifikasi aset yang tepat untuk dijadikan investasi, menentukan besarnya bagian dari investasi seorang investor pada setiap aset tersebut. Untuk itu selektivitas (peramalan pergerakan harga tiap sekuritas), penentuan waktu (peramalan pergerakan harga saham biasa yang secara umum relatif terhadap sekuritas dengan bunga tetap), dan diversifikasi perlu dilakukan.

4. *Merevisi Portofolio*

Sejalan dengan waktu, sekuritas yang tadinya tidak menarik sekarang menjadi menarik dan bisa juga kebalikannya. Sehingga investor merubah tujuan investasinya, yang berarti portofolio yang dipegangnya tidak lagi optimal. Kemudian investor membentuk portofolio baru dengan menjual portofolio yang dimilikinya dan membeli portofolio lain yang belum dimilikinya. Keputusan seperti ini tergantung dari besarnya biaya transaksi untuk melakukan perubahan tersebut dan juga besarnya peningkatan pendapatan investasi portofolio yang baru.

5. *Mengevaluasi Kinerja Portofolio*

Prosedur ini meliputi penentuan kinerja portofolio secara periodik dalam arti tidak hanya *return* yang diperhatikan tetapi juga risiko yang dihadapi. Jadi diperlukan ukuran yang tepat tentang *return* dan risiko yang relevan.

2.14 Pasar Modal

Pasar modal mirip dengan pasar-pasar lainnya, namun yang membedakannya adalah komoditi yang diperdagangkan. Produk yang diperjualbelikan di pasar modal berupa surat-surat berharga di bursa efek. Bursa efek dalam arti sebenarnya adalah suatu sistem yang terorganisir dengan mekanisme resmi untuk mempertemukan penjual dan pembeli sekuritas secara langsung atau melalui wakil-wakilnya. (*Tandelilin, 2001*).

Pasar modal juga dapat berfungsi sebagai lembaga perantara (*intermediaries*). Fungsi ini menunjukkan peran penting pasar modal dalam menunjang perekonomian karena pasar modal dapat menghubungkan pihak yang membutuhkan dana dengan pihak yang kelebihan dana. Di samping itu, pasar modal dapat mendorong terciptanya alokasi dana yang efisien, karena dengan adanya pasar modal maka pihak yang kelebihan dana (investor) dapat memilih alternatif investasi yang memberikan return yang optimal. Asumsinya, investasi yang memberikan return relatif besar adalah sektor-sektor yang paling produktif yang ada di pasar, dengan demikian, dana yang berasal dari investor dapat digunakan secara produktif oleh perusahaan-perusahaan tersebut.

Dana yang didapatkan perusahaan melalui penjualan sekuritas (saham) merupakan hasil perdagangan saham-saham perusahaan yang dilakukan di pasar perdana. Di pasar perdana inilah perusahaan untuk pertama kalinya menjual sekuritasnya, dan proses itu disebut dengan istilah *Initial Public Offering* (IPO) atau penawaran umum. Setelah sekuritas tersebut dijual perusahaan di pasar perdana, barulah kemudian sekuritas diperjualbelikan oleh investor-investor di pasar sekunder atau dikenal dengan pasar reguler. Transaksi yang dilakukan investor di pasar sekunder tidak akan memberikan tambahan dana lagi bagi perusahaan yang menerbitkan sekuritas (emiten), karena transaksi hanya terjadi antar investor, bukan dengan perusahaan.

2.15 Saham

Saham (*stock*) dapat didefinisikan sebagai tanda penyertaan atau kepemilikan seseorang atau badan dalam suatu perusahaan atau perusahaan terbatas.

Saham dibagi menjadi saham biasa (*common stock*) dan saham preferen (*preferred stock*). Saham biasa merupakan saham yang menempatkan pemiliknya paling yunior atau paling akhir terhadap pembagian dividen dan hak atas harta kekayaan perusahaan apabila perusahaan tersebut dilikuidasi (tidak memiliki hak-hak istimewa). Karakteristik lain dari saham biasa adalah dividen dibayarkan selama perusahaan memperoleh laba. Setiap pemilik saham memiliki hak suara dalam rapat umum pemegang saham (*one share one vote*). Pemegang saham biasa memiliki tanggung jawab terbatas terhadap klaim pihak lain sebesar proporsi sahamnya dan memiliki hak untuk mengalihkan kepemilikan sahamnya kepada orang lain.

Sedangkan untuk saham preferen, merupakan saham yang mempunyai kombinasi karakteristik gabungan dari obligasi dan saham biasa, karena saham preferen memberikan pendapatan yang tetap seperti halnya obligasi, dan juga memiliki hak kepemilikan pada saham biasa. Persamaan saham preferen dengan obligasi terletak pada tiga hal yaitu ada klaim atas laba dan aktiva sebelumnya, dividen tetap selama masa berlaku dari saham dan memiliki hak tebus dan dapat dipertukarkan dengan saham. Saham preferen lebih aman dibandingkan dengan saham biasa karena memiliki klaim terhadap kekayaan perusahaan dan pembagian dividen terlebih dahulu. Saham preferen sulit diperjualbelikan seperti saham biasa, karena jumlahnya yang sedikit.

2.16 Indeks LQ 45

Indeks yang terdiri dari 45 saham pilihan yang mengacu kepada 2 variabel yaitu likuiditas perdagangan dan kapitalisasi pasar. Indeks LQ 45 pertama kali diluncurkan pada tanggal 24 Februari 1997. Hari dasar untuk perhitungannya adalah 13 Juli 1994 dengan nilai dasar 100. Untuk seleksi awal digunakan data pasar dari Juli 1993-Juni 1994, hingga terpilih 45 emiten yang meliputi 72% dari total kapitalisasi pasar dan 72,5% dari total nilai transaksi di pasar reguler. Untuk masuk dalam pemilihan, suatu saham harus memenuhi kriteria-kriteria sebagai berikut:

1. Masuk dalam urutan 60 terbesar dari total transaksi saham di pasar reguler (rata-rata nilai transaksi selama 12 bulan terakhir).
2. Urutan berdasarkan kapitalisasi pasar (rata-rata nilai kapitalisasi pasar selama 12 bulan terakhir).
3. Telah tercatat di BEI selama paling sedikit 3 bulan.
4. Kondisi keuangan dan prospek pertumbuhan perusahaan, frekuensi dan jumlah hari transaksi di pasar regular.

BEI secara rutin memantau perkembangan kinerja komponen saham yang masuk dalam perhitungan Indeks LQ45. Setiap 3 bulan *review* pergerakan rangking saham akan digunakan dalam kalkulasi Indeks LQ45. Pergantian saham akan dilakukan setiap enam bulan sekali, yaitu pada awal bulan Februari dan Agustus. Apabila terdapat saham yang tidak memenuhi kriteria seleksi Indeks

LQ45, maka saham tersebut dikeluarkan dari perhitungan indeks dan diganti dengan saham lain yang memenuhi kriteria.

2.17 Sertifikat Bank Indonesia

Dalam UU No. 13 Tahun 1968 tentang Bank Setral, salah satu tugas Bank Indonesia (BI) sebagai otoritas moneter adalah membantu pemerintah dalam mengatur, menjaga, dan memelihara kestabilan nilai tukar upiah. BI menggunakan beberapa piranti moneter dalam melaksanakan tugasnya, yaitu Giro Wajib Minimum (*Reserve Requirement*), Fasilitas Diskonto, Himbauan Moral dan Operasi Pasar Terbuka. Dalam Operasi Pasar Terbuka, BI dapat melakukan transaksi jual beli surat berharga termasuk Sertifikat Bank Indonesia (SBI).

SBI adalah surat berharga dalam rupiah yang diterbitkan oleh BI sebagai pengakuan hutang berjangka waku pendek dengan sistem diskonto. Sertifikat Bank Indonesia merupakan *riskless asset* karena *yield* yang akan diterima akan lebih besar dari nol dan tidak mengandung risiko.

Sebagai otoritas moneter, BI berkewajiban memelihara kestabilan nilai rupiah. Dalam paradigma yang dianut, jumlah uang primer (uang kartal+uang giral) di BI yang berlebihan dapat mengurangi kestabilan nilai rupiah. SBI diterbitkan dan dijual oleh BI untuk mengurangi kelebihan uang primer tersebut.

Karakteristik SBI yaitu :

1. Jangka waktu maksimum 12 bulan dan sementara waktu hanya diterbitkan untuk jangka waktu 1 dan 3 bulan.
2. Denominasi : dari yang terendah Rp 50.000.000,00 sampai Rp 100.000.000.000,00.

3. Pembelian SBI oleh masyarakat minimal Rp 100.000.000,00 dan selebihnya dengan kelipatan Rp 50.000.000,00.
4. Pembelian SBI didasarkan pada nilai tunai yang diperoleh dari rumus berikut :

$$\frac{Nilai\ \ Nominal \times 360}{360 + \left(Tingkat\ \ Diskonto \times Jangka\ \ Waktu\right)}$$

5. Pembelian SBI memperoleh hasil berupa diskonto yang dibayar dimuka, besarnya diskonto adalah nilai nominal dikurangi dengan nilai tunai.
6. Pajak penghasilan (PPh) atas diskonto dikenakan secara final sebesar 15%.

2.18 Return Saham

Return adalah tingkat pengembalian yang dinikmati oleh investor dari kelebihan investasi yang dilakukan. Tanpa adanya keuntungan yang dapat dinikmati dari suatu investasi tentunya investor tidak akan mau berinvestasi. Setiap investasi baik jangka panjang maupun jangka pendek mempunyai tujuan utama untuk mendapatkan keuntungan *return*.

Dalam dunis ekonomi finansial, istilah *return* menjadi suatu bagian yang sangat familiar untuk mengenali keadaan sesungguhnya dari harga. Sedikitnya ada dua hal yang sangat penting yang menjadi alasan esensial mengapa perhatian terhadap nilai *return* mendapat proporsi yang lebih besar dibandingkan dengan perhatian terhadap harga itu sendiri. Pertama, bagi kebanyakan investor, *return* menggambarkan secara nyata perubahan harga. Kedua, bagi praktisi, *return* secara teoritis dan empirik lebih atraktif dalam menggambarkan sifat-sifat statistik, misalnya stasioneritas dan kejadian-kejadian yang berkaitan dengan perubahan harga.

Macam-macam *return*:

a. *Simple Net Return*

Secara matematis dituliskan sebagai berikut:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{2.18.1}$$

dengan R_t = *return* saham pada waktu ke-t

P_t = Harga saham pada waktu ke-t tanpa adanya *dividen*.

P_{t-1} = Harga saham pada waktu ke-t-1 tanpa adanya *dividen*.

b. *Simple Gross Return*

Dari definisi *Simple Net Return*, dapat dikembangkan pemikiran untuk menghitung *Simple Gross Return* dengan k periode dari waktu t-k sampai waktu t, yang ditulis sebagai $1+R_t(k)$, atau dikenal juga sebagai *Return* Majemuk (*compound return*).

$$1 + R_t(k) \cong (1 + R_t).(1 + R_{t-1})\ldots(1 + R_{t-k+1})$$

$$= \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \frac{P_{t-2}}{P_{t-3}} \ldots \frac{P_{t-k-1}}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-k}} \tag{2.18.2}$$

c. *Continous Compounding Return*

Continuos Compounding Return didefinisikan sebagai logaritma natural dari *gross return*, yang diformulasikan sebagai berikut:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \tag{2.18.3}$$